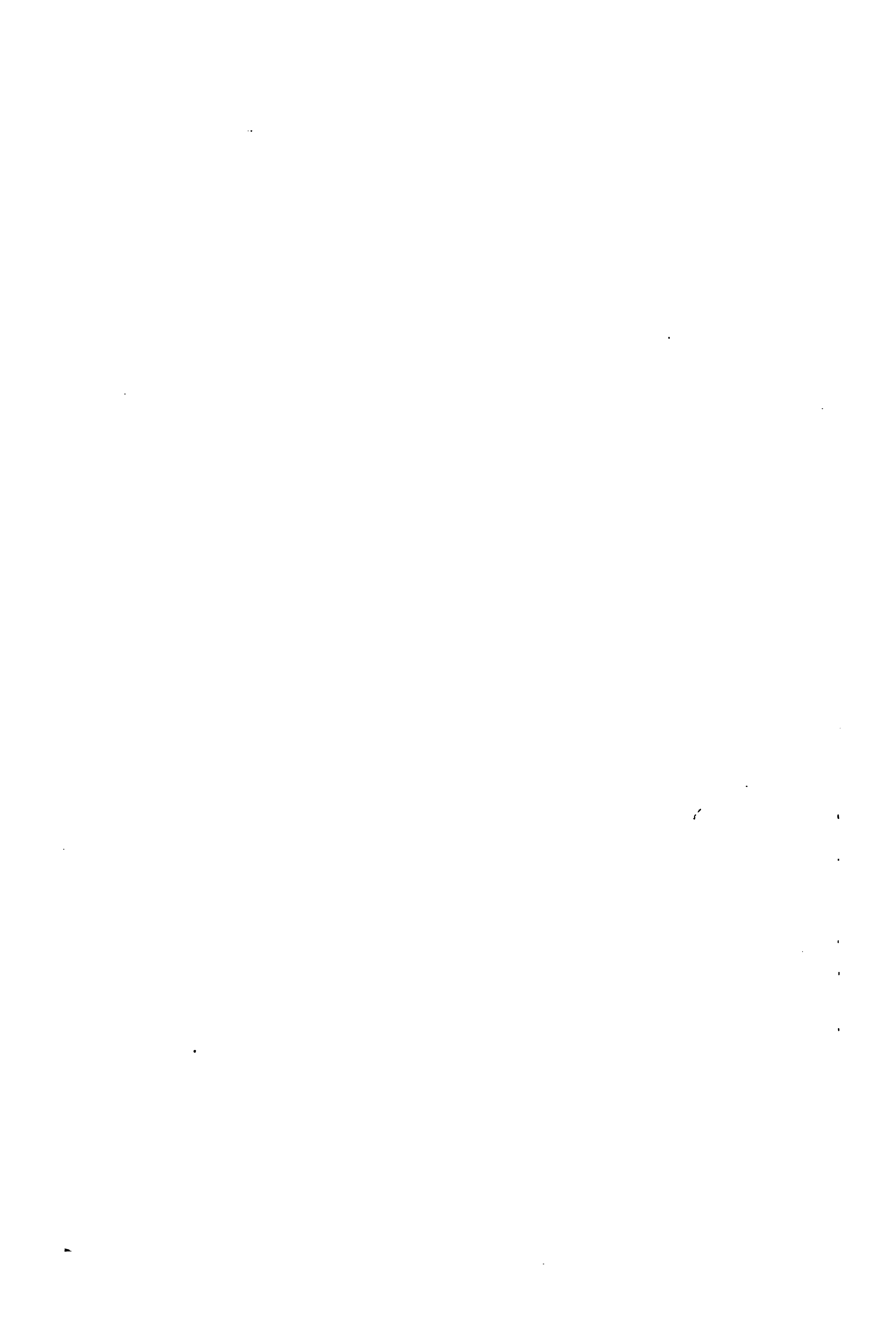
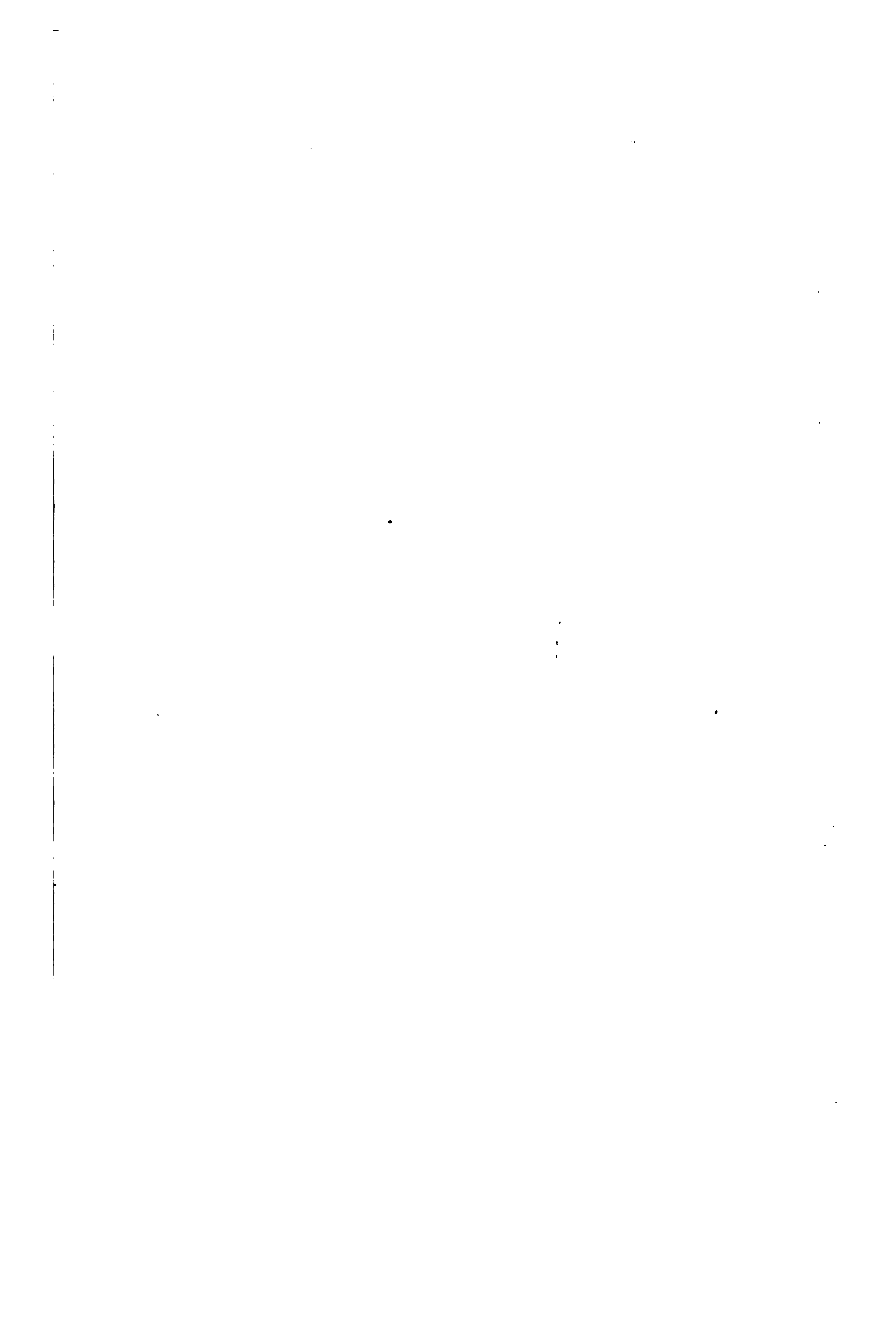






VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE PHYSIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

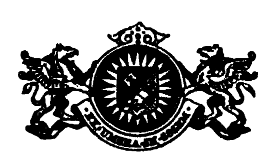
ARTHUR KÖNIG, OTTO KRIGAR-MENZEL, MAX LAUE,
FRANZ RICHARZ, CARL RUNGE.

BAND IV.

ELEKTRODYNAMIK UND THEORIE DES MAGNETISMUS

HERAUSGEGEBEN VON

OTTO KRIGAR-MENZEL UND MAX LAUE.



LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1907.

VORLESUNGEN

ÜBER

ELEKTRODYNAMIK UND THEORIE DES MAGNETISMUS

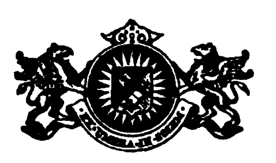
VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

OTTO KRIGAR-MENZEL UND MAX LAUE.

MIT 30 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1907.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Im Gegensatz zu den bereits längst erschienenen fünf Bänden dieses Werkes lag für die Bearbeitung des vorliegenden vierten Bandes kein officielles Stenogramm vor, weil HELMHOLTZ über den hier behandelten Gegenstand seit der Entstehung des Planes einer Herausgabe seiner Vorlesungen nicht mehr gelesen hat. Als Grundlage dienten vielmehr nur das Notizbuch und vorhandene Nachschriften aus dem Wintersemester 1888/1889; auch bildeten für manche Kapitel namentlich der zweiten Hälfte des Buches HELMHOLTZ' einschlägige Originalarbeiten eine willkommene Ergänzung zu den knappen Notizen.

Der einzige Punkt, in welchem das letztere Hülfsmittel versagte, ist die in § 70 auseinandergesetzte Elektrodynamik, welche im Gegensatz zu der in den bekannten Abhandlungen veröffentlichten keine longitudinalen Wellen kennt, im Gegensatz zur MAXWELL'schen Theorie aber die Fernwirkung im Vacuum beibehält. Da sie sich von der letzteren formal nur durch die Bedeutung einer Constanten unterscheidet und sich durch einen Grenzübergang in sie überführen läſst, glaubten die Herausgeber der seitherigen Weiterentwickelung der Elektricitätslehre das Zugeständniſs machen zu sollen, daſs sie der Discussion der elektrischen Schwingungen statt der genannten Elektrodynamik die MAXWELL'sche zu Grunde legten.

Die Herausgeber.

Inhalt.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht der Elektricität auf leitenden Körpern.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundsätze.

Zweites Kapitel.

Theorie der elektrischen Bilder.

Drittes Kapitel.

Kugelfunctionen.

Zweiter Abschnitt.

Elektromagnetische Schwingungen.

EINLEITUNG.

In der Dynamik der ponderablen Massen, soweit letztere als Systeme von Massenpunkten — freien oder fest verbundenen — angesehen werden können, kommt man aus mit der Annahme von Naturkräften, welche zwischen je zwei Punkten in Richtung der Verbindungslinie nach unveränderlichen Gesetzen wirken. Es sind dies Anziehungs- oder Abstofsungskräfte, deren Intensität der Gröfse der beiden Massen — dem Mafse ihrer Trägheit — proportional ist und sonst nur von der Entfernung zwischen den Punkten abhängt, nicht aber explicite von der Zeit noch von den Geschwindigkeiten der Punkte. Im Gebiete der elektromagnetischen Erscheinungen kommt man mit solchen elementaren Centralkräften nicht durch; es treten dort auch drehende Einwirkungen auf, welche nicht in Anziehung oder Abstofsung, sondern in einem Antrieb senkrecht auf der Verbindungslinie bestehen. Dabei haben wir es allem Anscheine nach mit Agentien oder Substanzen zu thun, welche verschieden sind von der trägen und ponderablen Materie. Das Attribut der Unzerstörbarkeit kann man auch ihnen zuerkennen, jedoch mit einer charakteristischen Modifikation. Diese Quanta erscheinen nämlich als algebraische Gröfsen, welche sowohl positiv wie negativ sein können. Eine Vermischung gleich grofser Mengen von entgegengesetzter Art giebt dann die Summe Null: Die entgegengesetzten Agentien heben sich gegenseitig auf und umgekehrt kann man in einem neutralen System beliebig grofse Mengen beider entgegengesetzter Arten von einander trennen. Der Begriff der Unzerstörbarkeit und Unvermehrbarkeit ist also für die elektrischen und die magnetischen Agentien durch den Zusatz zu beschränken, dafs gleich grofse Mengen beider entgegengesetzter Substanzen verschwinden oder entstehen können und dafs der neutrale Vorrath, den man trennen kann, unerschöpflich ist. Diese Substanzen haben ihren Sitz nie im leeren Raum,

sondern immer in der ponderablen Materie[1]), und zwar erlauben gerade die dichtesten Körper, die Metalle, den elektrischen Substanzen eine grofse Beweglichkeit, und die Metalle der Eisengruppe in gewissem Sinne auch den magnetischen Substanzen. Wegen dieser Leichtbeweglichkeit hat man diese Substanzen auch als Fluida, gewissermafsen imponderable Flüssigkeiten, bezeichnet; auch die Bezeichnung elektrischer Strom ist aus dieser Auffassung entstanden. Da nun, wie gesagt, die Kraftwirkungen zwischen elektrisch durchströmten Körpern und die zwischen solchen und Magneten sich nicht zurückführen liefsen auf Centralkräfte in Richtung der Verbindungslinie, so versuchten die Physiker die Grundgesetze dieser hypothetischen Kräfte zwischen den elektrischen Substanzen so zu erweitern, dafs die Kräfte aufser vom Abstand auch noch von der Geschwindigkeit der bewegten Substanzen abhingen. Die bekannteste Form eines solchen Grundgesetzes ist die von Wilhelm Weber gegebene; auch Riemann und Clausius haben über solche Grundgesetze nachgedacht. Die Art der Wirkung ist dabei sowohl für ruhende wie für bewegte Fluida vorgestellt als eine unvermittelte Fernwirkung, welche momentan an jeder Stelle des Raumes eintritt.

Faraday nahm Anstofs an dem Begriff der Fernwirkung. Schon Newton hat sich wohl schwer oder gar nicht dazu entschliefsen können bei der Formulirung seines Gravitationsgesetzes; er sagt deshalb auch nur, die Bewegungen der Himmelskörper gehen so vor sich, wie sie aus der mathematischen Formel für die Anziehungskraft berechnet werden, ohne auszusprechen, dafs das wahre Wesen dieser Kraft eine unvermittelte Fernwirkung sei. Über eine Ursache der Gravitationswirkung macht überhaupt Newton gar keine Annahmen. Auch heut zu Tage ist es noch nicht gelungen, eine befriedigende Erklärung dafür zu finden. Den auf Newton folgenden Generationen wurde das Unerklärliche immer weniger fühlbar, während die Anwendung des Gesetzes die Bewegungserscheinungen im Weltraum mit gröfster Schärfe zu berechnen erlaubte. Man glaubte daher mehr und mehr, wenn man die Kraftwirkungen in der Natur auf ein dem bewährten Schema des Gravitationsgesetzes nachgebildetes System von Fernkräften zurückgeführt habe, damit die befriedigendste Erklärung gefunden zu haben.

Durch die Arbeiten der an Faraday anknüpfenden Physikerschule wurde nun die Anschauung vom Wesen der elektrischen und

---

[1]) Die Vorstellung freier Elektronen war damals (1888) noch nicht gebildet worden.

magnetischen Phänomene zu einem vollendeteren Standpunkt gefördert als die der mechanischen Wirkungen träger Materie, bei der wir bis jetzt ohne die Annahme von Fernkräften in Ermangelung einer befriedigenderen Grundlage noch nicht auskommen.

FARADAY suchte, getrieben von der Überzeugung, dafs die Wirkungen zwischen getrennten Körpern sich durch das zwischenliegende Medium stetig fortpflanzen müfsten, Veränderungen in diesen nachzuweisen. So gelang es ihm die Magnetisirbarkeit aller Substanzen nachzuweisen. Die von ihm entdeckte Erscheinung des Diamagnetismus vieler Körper findet ihre ungezwungenste Erklärung in der Anschauung, dafs sogar der von ponderabler Substanz gänzlich gesäuberte, leere Raum, den man als Zwischenmedium den freien Aether genannt hat, magnetisirbar sei, und zwar stärker magnetisirbar als die diamagnetischen, schwächer als die paramagnetischen Körper. Analog fand er, dafs in den elektrischen Isolatoren ein besonderer Zustand sich verrät — die dielektrische Polarisation; die Fähigkeit diese auszubilden ist ebenfalls auf den freien Aether mit zu erstrecken, wenn auch hier nicht etwa ein Analogon zum Diamagnetismus (welches nicht bekannt ist) zu dieser Vorstellung drängt. Auf Grund dieser FARADAYschen Vorstellung hat dann CL. MAXWELL eine mathematische Theorie der Elektricität und des Magnetismus und ihrer Wechselwirkungen ausgearbeitet, welche lehrt, dafs Fernwirkungen nicht existiren, sondern dafs alle in das Gebiet gehörigen Wirkungen sich mit endlicher, wenn auch sehr grofser, Geschwindigkeit durch den Raum als Störungen des Aethers ausbreiten. Der Werth dieser Geschwindigkeit konnte auch experimentell gemessen werden mit Hülfe stehender elektrischer Wellen durch HEINRICH HERTZ; eine Abweichung vom Werthe der Lichtgeschwindigkeit konnte nicht constatirt werden.

Die Formulirung dieser neuen Theorie bereitete begreiflicher Weise lange Zeit hindurch grofse Schwierigkeiten. Sie verlangte die Conception neuer, eigenartiger Begriffe, welche an die Spitze des ganzen Systems gestellt werden mufsten, während diese in dem alten Vorstellungskreis, wenn überhaupt unterzubringen, nur fernabliegende Begriffe von nebensächlicher Bedeutung repräsentirten. Umgekehrt sanken die Grundstützen der alten Theorie, die unzerstörbaren Substanzen der elektrischen und magnetischen Fluida herab zur Bedeutung von sekundären Rechengröfsen — sogenannten Integrationsconstanten.

Diese FARADAY-MAXWELLschen Ideen führen eine vollständige Umwälzung in der theoretischen Physik des Aethers herbei, indessen

befindet sich die Lehre augenblicklich[1]) noch in einer Krisis, die erst durchgemacht werden mufs. Defshalb ist es für einen Lehrvortrag zur Einführung in das Gebiet einstweilen gerathener, sich nicht von vornherein auf MAXWELL'schen Boden zu stellen, sondern eine historische Darstllung der Begriffe und Gesetze zu geben, wie sie sich entwickelt haben.

---

[1]) 1888 gesprochen. Die Krisis dürfte heut als überwunden gelten, man ist indessen neuerdings durch Einführung des Elektronenbegriffs den älteren Vorstellungen von der substantiellen Natur der Elektricität wieder etwas näher gekommen.

Erster Theil.

Elektrostatik.

Erster Abschnitt.

Feste elektrische Ladungen, Kräfte und Potentiale.

§ 1. Das Gesetz von Coulomb.

Die alte Lehre von den beiden entgegengesetzten elektrischen Fluidis mit ihren Fernkräften ist sehr vollständig ausgearbeitet worden und giebt für eine grofse Klasse von Phänomenen vollständige und einheitliche Erklärungen. Es sind dies die Erscheinungen, bei denen die Vertheilung der elektrischen Quanta in Ruhe fortbesteht oder höchstens mit ihren ponderablen Trägern in mäfsigen Geschwindigkeiten bewegt wird. Bei diesen Phänomenen befinden sich die Ladungen jederzeit im Gleichgewicht der zwischen ihnen wirkenden Kräfte; man nennt daher die Lehre von denselben Elektrostatik.

Die eigenthümlichen, scheinbar unvermittelt in die Ferne wirkenden elektrischen Kräfte kann man nach der Art ihrer Wirkung in zwei Erscheinungsformen trennen:

1. Ponderomotorische Kräfte, welche die ponderablen Träger der Elektricität in Bewegung setzen, oder denen durch mechanische Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden kann.

2. Elektromotorische Kräfte, welche in ruhenden (oder mäfsig bewegten) leitenden Trägern die Fluida selbst in Bewegung setzen. Diese Bewegungen führen übrigens meist in allerkürzester Zeit zu solchen Anordnungen der Fluida, welche jene elektromotorischen Kräfte aufheben und damit einen Ruhezustand herbeiführen. Die anderen Fälle, in denen das Gleichgewicht der elektrischen Kräfte dauernd gestört bleibt, werden wir bei der Lehre von den galva-

nischen Strömen kennen lernen, hier beschäftigt uns zunächst nur der Fall des Gleichgewichts.

Das Gesetz, nach welchem die elektrischen Kräfte wirken, ist in beiden Erscheinungsformen, der ponderomotorischen und der elektromotorischen, das gleiche; es spricht nicht von den materiellen Trägern der Fluida, sondern nur von letzteren. COULOMB bestimmte das Gesetz der ponderomotorischen Wirkung zwischen zwei elektrisch geladenen kleinen Kugeln mit Hülfe der Drehwaage (7 Abhandlungen der Pariser Akademie 1785—89). Er fand, so weit die Genauigkeit seiner Versuchsanordnung dies zu erkennen erlaubte, dafs die mechanische Abstofsungskraft zwischen zwei mit gleichnamiger Elektricität geladenen kleinen Körpern proportional ist dem Producte der beiden Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes. Bezeichnet man die Kraft mit K, die beiden Elektricitätsmengen mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, den Abstand ihrer kleinen Träger mit r und endlich mit A^2 eine Constante, das soll heifsen eine Gröfse, welche für alle möglichen Ladungen und Abstände denselben Werth besitzt, so kann man das COULOMB'sche Gesetz durch folgende Formel darstellen:

$$K = A^2 \cdot \frac{\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2}{r^2} \, . \tag{1}$$

Der Theil des Gesetzes, welcher die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung r ausdrückt, kann, so lange es sich um dieselben unveränderten Ladungen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ handelt, durch Messungen an der Drehwaage und Längenmessungen direct bestätigt werden, dagegen verlangt das im Zähler des Ausdrucks stehende Product $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ die Möglichkeit, verschieden grofse Elektricitätsmengen wenigstens nach einem relativen Maafse messen zu können. Als Kriterium der Gleichheit zweier Quanta mufs die Gleichheit ihrer Wirkung auf ein und dasselbe dritte Quantum dienen. Man braucht dann noch eine Methode der Addition und der Theilung dieser Gröfsen, um das Mengenverhältnifs verschiedener Ladungen messen zu können und damit die Ladungen als physikalische Gröfsen zu erkennen. Möglichkeiten hierzu wären gegeben durch die Berührung metallischer isolierter Träger, weil in ihnen die Elektricität vollkommen beweglich ist. Die Sache liegt hier anders als bei dem sonst ähnlich lautenden Gravitationsgesetz. Dort ist das Agens die träge Masse, für welche ein Maafs bereits in der Gröfse ihres Beharrungsvermögens oder auch ihrer lebendigen Kraft gefunden ist, so dafs es als eine besondere, nicht selbstverständliche Eigenschaft hinzu-

kommt, dafs die Massenanziehung sich gerade dieser Quantität der Trägheit proportional bethätigt. Von den elektrischen Ladungen aber kennen wir, wenigstens im Gebiete der Elektrostatik, keine anderen mefsbaren Eigenschaften, als die durch das COULOMB'sche Gesetz formulirten Abstofsungs- oder Anziehungskräfte. Von diesem Standpunkte aus erscheint es selbstverständlich, dafs eine Ladung z. B. doppelt so grofs ist, als eine andere, wenn sie aus gleichem Abstande und auf dieselbe zur Prüfung verwendete Ladung wirkend, die doppelte Abstofsungs- oder Anziehungskraft hervorbringt, aber es liegt in diesem Schlufs doch die Voraussetzung, dafs durch die Hinzufügung neuer Ladungen weder die bereits vorhandene noch die hinzugefügte in ihrer Wirksamkeit irgendwie verändert werden, sondern dafs sie als unveränderliche Quanta mit unveränderlichen Eigenschaften addirt werden, also echte physikalische Gröfsen sind. Diese Anschauung hat sich in den feinsten experimentellen Prüfungen durchaus bewährt. Alle scheinbaren Widersprüche dagegen lassen sich befriedigend erklären, z. B. die regelmäfsig mit der Zeit abnehmende Kraft durch Abnahme der Ladungen in Folge mangelhafter Isolirung, die Veränderung der Kraft je nach dem isolirenden Zwischenmedium durch einen besonderen, der Magnetisirung von ganz weichem Eisen analogen, elektrischen Zustand des Mediums. Das COULOMB'sche Gesetz nimmt freilich keine Rücksicht auf das Zwischenmedium, mufs daher, wenn die Gröfse A^2 wirklich constant sein soll, beschränkt werden auf Ladungen, welche sich im Vacuum oder in der elektrisch nur sehr wenig davon verschiedenen Luft gegenüberstehen.

Ein experimenteller Nachweis dafür, dafs im Zähler des Ausdrucks Gleichung (1) das Produkt der beiden elektrischen Quanta $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ auftreten mufs, liefse sich — wenigstens in der Idee — folgendermaafsen mit der Drehwaage ausführen: Zunächst weist man die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung durch Vertauschung der feststehenden und der am Hebelarm beweglichen Ladung nach. Sodann stellt man sich noch zwei mit dem gleichen Quantum $\mathfrak{e}_0$ beladene Körperchen her und mifst immer im gleichen Abstande $r = 1$ die Abstofsungskräfte zwischen allen möglichen Paaren von Ladungen. Diese Kräfte seien bezeichnet durch

$$K_{00}, \; K_{01} = K_{10}, \; K_{02} = K_{20}, \; K_{12} = K_{21} \, .$$

Man wird dann durch Messung folgende Proportion bestätigt finden

$$K_{12} : K_{02} = K_{10} : K_{00} \, ,$$

aus welcher folgt:

$$K_{12} = \frac{K_{01} \cdot K_{02}}{K_{00}} = \left(\frac{K_{01}}{\sqrt{K_{00}}}\right) \cdot \left(\frac{K_{02}}{\sqrt{K_{00}}}\right).$$

Die Kraft zwischen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ erscheint also dargestellt als Product zweier gleichgebildeter Factoren, deren erster nur von $\mathfrak{e}_1$, deren zweiter nur von $\mathfrak{e}_2$ abhängt. Die Gröfse $\mathfrak{e}_0$ kann keinen Einflufs auf den Werth dieser Factoren haben, vielmehr stellen letztere direct die elektrischen Massen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ dar.

§ 2. Absolute Einheit der Elektricitätsmenge.

Jedenfalls bildet das COULOMB'sche Gesetz das ursprünglichste und nächstliegende Mittel, um die Gröfse elektrischer Ladungen oder Quanta zu messen. Wäre das elektrische Quantum erklärbar durch einen besonderen mechanischen Zustand seines Trägers, so könnte man dessen Dimension und Maafseinheit anschliefsen an die absoluten mechanischen Maafse, welche sich alle auf die Einheiten der Länge, der Masse und der Zeit zurückführen lassen. Dann würde sich auch die Constante A^2 in Gleichung (1) nach Zahl und Dimension angeben lassen. Da aber die elektrischen Quanta durchaus geschieden von der mechanischen Erscheinungswelt dastehen, und nur an ihresgleichen relativ gemessen werden können, so ist eine absolute Einheit für ihr Maafs nicht direct angebbar. Ein einheitliches, überall reproducirbares Mafs ist aber für den Vergleich der verschiedenen Messungen sehr erwünscht, oft unerläfslich.

Deshalb ist man nach dem Vorgang von WILHELM WEBER übereingekommen als Einheit der Elektricitätsmenge diejenige festzusetzen, bei deren Anwendung das COULOMB'sche Gesetz die einfachste Gestalt annimmt, bei welcher also der Proportionalitätsfactor A^2 durch die Zahl 1 ersetzt wird:

$$K = \frac{\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2}{r^2}. \tag{1 a}$$

Durch diese willkürliche Festsetzung erhalten wir nicht nur eine Maafseinheit des Elektricitätsquantums, sondern das Quantum erhält auch eine an das absolute Maafssystem der mechanischen Gröfsen sich anschliefsende Dimension, welcher zwar keine innere sachliche Bedeutung zukommt, mit der man jedoch nützlich rechnen kann. Die mechanische Kraft K hat die Dimension:

$$K = [L M T^{-2}].$$

Hier bedeutet L eine Länge, M eine Masse, T eine Zeit; die eckige Klammer soll andeuten, dafs die Gleichung sich nur auf die Dimension, nicht auf den Zahlenwerth, bezieht. (Vergl. Bd. I, 2, S. 32—35.)

Das Quadrat des Abstandes ist das Quadrat einer Länge:

$$r^2 = [L^2].$$

Es ist also nach Gleichung (1 a):

$$e_1 \cdot e_2 = r^2 K = [L^3 M T^{-2}].$$

Da nun e_1 und e_2 als gleichartige Gröfsen auch von gleicher Dimension sein müssen, so hat das Product $e_1 \cdot e_2$ die Dimension des Quadrats der Elektricitätsmenge, und die Elektricitätsmenge selbst hat die Dimension

$$e = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]. \tag{2}$$

Man nennt diese Art der Maafsbildung die elektrostatische. W. Weber benützte als Grundeinheiten mm, mg, sec; wenn wir aber das seit dem Pariser Internationalen Congrefs von 1881 gebräuchliche C.G.S.-System (cm, g, sec) befolgen, so ist die absolute elektrostatische Einheit der Ladung dadurch definirt, dafs zwei hinreichend kleine Körper, beide mit je dieser Einheit beladen, sich im Abstande von 1 cm mit der Kraft 1 Dyn abstofsen. Diese Kraft ist nahezu ebenso grofs, wie der Zug der Schwerkraft, welchen wir empfinden, wenn wir ein Milligrammgewicht in der Hand halten. Die elektrostatische C.G.S.-Einheit der Ladung ist also ein verhältnifsmäfsig sehr kleines Quantum, von welchem, unseren Sinnen zugänglich, nur geringe Wirkungen ausgehen. Durch feine Mefsapparate (Elektrometer) können zwar sogar Bruchtheile dieser Einheit nachgewiesen werden, aber bei allen gröberen Versuchen, bei denen sich direct sinnfällige Phänomene zeigen, hat man es mit viel gröfseren Quantitäten zu thun, welche nach Tausenden oder gar Millionen dieser Einheit zählen.

§ 3. Rechtwinklige Coordinaten, Kraftcomponenten.

Wir legen im Raume ein rechtwinkliges Coordinatensystem fest, dessen Abmessungen mit x, y, z bezeichnet werden, bringen an die Stelle $x_1\, y_1\, z_1$ ein kleines Körperchen beladen mit der Elektricitätsmenge e_1 und an eine andere Stelle x_2, y_2, z_2 ein kleines Körperchen beladen mit der Menge e_2. Um die Vorstellung festzulegen, wollen wir e_1 und e_2 gleichstimmig annehmen, so dafs eine Abstofsungskraft

zwischen den beiden Theilchen besteht. Diese wirkt, dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung folgend, auf beide Ladungen in gleicher Stärke und in entgegengesetzter Richtung, und zwar ist diese Richtung an beiden Punkten die Verlängerung der geraden Verbindungslinie. Diese beiden Kräfte zerlege man in Componenten parallel den Coordinatrichtungen; die auf $\mathfrak{e}_1$ wirkenden seien X_1, Y_1, Z_1, die auf $\mathfrak{e}_2$ wirkenden seien X_2, Y_2, Z_2. In Figur 1 ist diese Zerlegung für die beiden Richtungen x und y gezeichnet unter der Annahme, dafs $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ ist. Die Richtungscosinus des Pfeiles K_1 sind nun abzulesen:

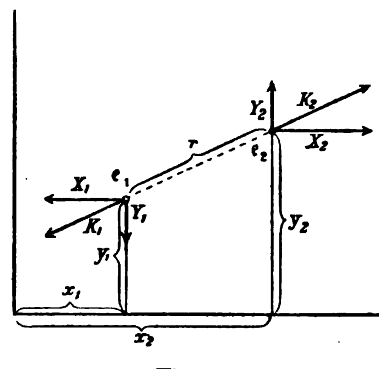


Fig. 1.

$$\left.\begin{aligned}\cos(K_1, x) &= \frac{x_1 - x_2}{r}\\ \cos(K_1, y) &= \frac{y_1 - y_2}{r}\\ \cos(K_1, z) &= \frac{z_1 - z_2}{r}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hier bedeutet r den absoluten Werth des Abstandes beider Ladungen:

$$\left.\begin{aligned}r &= \left|\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\right|\\ &= \left|\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right|\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Der absolute Werth der Kraft ist nun nach dem Coulomb'schen Gesetz:

$$K_1 = K_2 = \frac{\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2}{r^2}$$

und aus ihm gewinnt man die Componenten durch Multiplication mit den Richtungscosinus:

$$\left.\begin{aligned}X_1 &= \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2}{r^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r} = \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,(x_1 - x_2)}{r^3}\\ Y_1 &= \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,(y_1 - y_2)}{r^3}\\ Z_1 &= \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,(z_1 - z_2)}{r^3}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Da die auf $\mathfrak{e}_2$ ausgeübte Kraft der ersteren entgegengesetzt gleich ist, haben ihre drei Componenten das entgegengesetzte Vorzeichen und gleichen absoluten Betrag wie die vorstehenden. Wir wollen das nicht durch vorgesetzte Minuszeichen ausdrücken, sondern durch Umdrehung der Coordinatendifferenzen. So findet man:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,(x_2 - x_1)}{r^3} \\ Y_2 &= \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,(y_2 - y_1)}{r^3} \\ Z_2 &= \frac{\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2\,(z_2 - z_1)}{r^3}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{a})$$

Man überzeugt sich leicht, dafs diese sechs algebraischen Ausdrücke für alle möglichen relativen Lagen der beiden Punkte 1 und 2 das richtige Vorzeichen für die Kraftcomponenten ergeben, ja wir können jetzt auch die Beschränkung fallen lassen, dafs es sich um die Abstofsung zweier gleichnamiger Elektricitätsmengen handeln soll. Die vorstehenden Ausdrücke gelten unverändert auch für die Anziehung zwischen einer positiven und einer negativen Ladung. Thatsächlich haben bei Anziehung alle sechs Componenten entgegengesetztes Vorzeichen wie bei Abstofsung. Das kommt nun auch in diesen Formeln zum Ausdruck, denn das Product $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$, welches für zwei gleichnamige Ladungen (gleichviel ob + oder −) stets positiv ist, wird für zwei ungleichnamige Ladungen nothwendiger Weise negativ, so dafs auch in diesem Falle aus den Formeln (5) und (5a) die richtigen Componenten der Kräfte gefunden werden.

§ 4. Potentielle Energie zwischen zwei elektrisch geladenen Körperchen.

Die vorstehenden Ausdrücke für die sechs Kraftcomponenten kann man als partielle Differentialquotienten einer und derselben einfachen Function der Coordinaten darstellen. Zunächst findet man, wenn man den in Gleichung (4) gegebenen Ausdruck r der Reihe nach nach allen sechs darinsteckenden Coordinaten differenzirt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_1} &= \frac{x_1 - x_2}{r} & \qquad \frac{\partial r}{\partial x_2} &= \frac{x_2 - x_1}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y_1} &= \frac{y_1 - y_2}{r} & \qquad \frac{\partial r}{\partial y_2} &= \frac{y_2 - y_1}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z_1} &= \frac{z_1 - z_2}{r} & \qquad \frac{\partial r}{\partial z_2} &= \frac{z_2 - z_1}{r}\,. \end{aligned}$$

Das sind nur andere Darstellungen für die Richtungscosinus von r. Ferner ist nach den Regeln des Differenzirens

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x_1 - x_2}{r^3}$$

und analog jeder der fünf anderen partiellen Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y_2} = -\frac{y_2 - y_1}{r^3} \text{ etc.}$$

Dies sind nun bis aufs Vorzeichen gerade die in den Ausdrücken der Kraftcomponenten vorkommenden Gebilde. Da $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ feste Gröfsen sind, welche unverändert gedacht werden müssen, wenn man die Abhängigkeit der Kraft von der Lage der Punkte aufsuchen will, so darf man $\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2$ als constanten Factor ungestört unter die Differenziationszeichen hineinschieben, und erhält folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}\right) & X_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}\right) \\ Y_1 &= -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}\right) & Y_2 &= -\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}\right) \\ Z_1 &= -\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}\right) & Z_2 &= -\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}\right). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Jede Kraftcomponente ist also dargestellt als ein negativer Differentialquotient der Function $\frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r}$ genommen nach derjenigen Coordinate des Zweiladungssystems, welche durch diese Componente beschleunigt wird. Die Kraftcomponenten sind ponderomotorische, mechanisch wirkende, also ist

$$\Phi = \frac{\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2}{r} \quad (7)$$

die potentielle Energie oder der Arbeitsvorrath des Systems der beiden geladenen Körperchen. (Vergl. die Einführung dieses Begriffs in Bd. I, 2 S. 196, Gleichung (115).) Da diese Energieform eine Folge der elektrostatischen Ladungen der beiden Körperchen ist, nennt man sie die elektrostatische Energie. Eine additive Constante kann man immer hinzufügen, welche bei der Bildung der Differentialquotienten wieder fortfällt, mithin ohne Einflufs auf die

Werthe der elektrischen ponderomotorischen Kraftcomponenten ist; in dieser Constanten kann man allerlei unveränderliche sonstige Energiegröſsen aufnehmen, welche sich bei wechselndem Abstand der beiden Ladungen nicht ändern, z. B. den bei constant gehaltener Temperatur unveränderten Wärmeinhalt der beiden Träger, oder den aus der Affinität der Stoffe beider Träger folgenden Inhalt an chemischer Energie, endlich aber auch noch zwei Beträge von ebenfalls elektrostatischer Art, welcher aus der Zusammendrängung der elektrischen Quanta in jedem der beiden kleinen Körper folgen. Diese letzteren können sehr bedeutend sein, bleiben aber bei Veränderungen von r unberührt, wenn die Träger Isolatoren oder sehr kleine Conductoren sind. Die potentielle Energie der Gravitation zwischen den Massen der beiden Träger endlich, welche allerdings von dem Abstand r abhängt, ist wohl stets wegen ihrer Kleinheit ohne Schaden zu vernachlässigen. Sorgt man dafür, daſs schnellere Bewegungen der Träger verhindert werden, so ist auch die kinetische Energie der Massen zu vernachlässigen, und der variable Theil der gesammten Energie bei gewöhnlichen elektrostatischen Versuchen ist durch die Formel (7) dargestellt. Sein Werth nähert sich der Null, wenn beide Ladungen in groſse Entfernung von einander gebracht werden, dagegen steigt sein Werth positiv an, wenn zwei gleichstimmige Ladungen einander genähert werden, und er sinkt ins Negative herab, wenn zwei entgegengesetzte Ladungen einander genähert werden. Mathematisch würde folgen, daſs die elektrostatische Energie $\pm\infty$ wird, wenn die Punktladungen zur Deckung gebracht werden, doch hat dies keine physikalische Bedeutung mehr, denn die Träger endlicher Elektricitätsmengen haben selbst immer eine gewisse Ausdehnung, und man darf sie nur so lange als Massenpunkte betrachten, als der Abstand r groſs ist gegen ihre eigene Ausdehnung.

Von dem Zwischenmedium, in dem die beiden geladenen Körper liegen, ist weder im COULOMB'schen Gesetze noch in dem daraus hergeleiteten Ausdruck der elektrostatischen Energie die Rede. Das ist eine Lücke, welche in der Fernwirkungstheorie nur durch besondere Vorstellungen über die Natur der sogenannten Dielektrika ausgefüllt werden kann, thatsächlich ist die Kraft von der Art des Mediums abhängig, wie FARADAY gezeigt hat. Wir wollen deſshalb einstweilen als Zwischenmedium den leeren Raum oder die elektrostatisch kaum davon verschiedene Luft voraussetzen.

§ 5. System vieler elektrisch geladener Körperchen.

Der nächste Schritt, den wir vorwärts thun, soll an die Stelle zweier geladener Körperchen eine ganze Schaar von beliebig vielen solchen setzen. Alsdann wirken zwischen jedem Paare Abstoſsungs- oder Anziehungskräfte nach dem COULOMB'schen Gesetze. In dieser Aussage liegt die Annahme, daſs alle die Kräfte, welche auf eines der Theilchen von den übrigen ausgeübt werden, sich ungestört durch geometrische Addition zu einer Resultante vereinigen, daſs also beispielsweise die Wirkung zwischen einer ersten und einer zweiten Ladung nicht dadurch verändert wird, daſs beide noch auf eine dritte Ladung einwirken und von dieser dritten beeinfluſst werden, eine Annahme, welche sich durchaus bestätigt hat, so lange die Träger der Ladungen hinreichend klein gegen ihre gegenseitigen Abstände sind, so daſs auf Verrückungen, welche die Ladungen im einzelnen Träger selbst erfahren können, keine Rücksicht zu nehmen ist. In gröſseren geladenen Conductoren, welche verhältniſsmäſsig nahe benachbart liegen, gilt dies nicht mehr, doch wird es auch in diesen Fällen gelingen, die veränderten Wirkungen durch Berücksichtigung der veränderlichen Vertheilung der Fluida in den Leitern auf das COULOMB'sche Gesetz zurückzuführen. Hier sehen wir von diesen Complicationen ab und nehmen jede Ladung unveränderlich in je einem Punkte concentrirt an.

Wir wählen einen beliebigen Punkt der Schaar aus und suchen die Kraft, welche er von allen übrigen zusammen erfährt. Um ihn zu unterscheiden, geben wir ihm den Index 0, nennen also seine elektrische Ladung $\mathfrak{e}_0$, seine Ortscoordinaten x_0, y_0, z_0, während die übrigen Punkte in beliebiger Reihenfolge mit $\mathfrak{a} = 1, 2, 3, \ldots \mathfrak{n}$ numerirt werden. Dadurch sind die Zeichen

$$\mathfrak{e}_\mathfrak{a};\ x_\mathfrak{a},\ y_\mathfrak{a},\ z_\mathfrak{a} \quad \text{für} \quad \mathfrak{a} = 1, 2, 3, \ldots \text{ bis } \mathfrak{n}$$

erklärt. Endlich brauchen wir noch die Abstände zwischen dem ausgewählten Punkte 0 und den übrigen Punkten, die man ausführlich mit $r_{0,\mathfrak{a}}$ bezeichnen müſste, die wir hier aber kurz $r_\mathfrak{a}$ nennen wollen. Es ist also

$$r_\mathfrak{a} = \left| \sqrt{(x_0 - x_\mathfrak{a})^2 + (y_0 - y_\mathfrak{a})^2 + (z_0 - z_\mathfrak{a})^2} \right| \quad \mathfrak{a} = 1, 2, 3, \ldots \mathfrak{n}. \tag{8}$$

Während sich die einzelnen Kräfte geometrisch summiren, treten deren gleichen Coordinatenrichtungen folgende Componenten zu drei algebraischen Summen zusammen, welche ihrerseits die drei Co-

ordinaten-Componenten der resultirenden Kraft angeben. Für die Componenten der Einzelkräfte wollen wir die im vorigen Paragraphen gefundene Darstellung als Differentialquotienten der elektrischen Energie anwenden. Danach ist die x-Componente der auf 0 wirkenden, von einem bestimmten $\mathfrak{a}$ herrührenden Einzelkraft:

$$X_{0,\mathfrak{a}} = -\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right).$$

Diese Componenten haben wir über alle $\mathfrak{a}$ zu summiren, die Summe, welche wir X_0 nennen, ist dann die eine Componente der gesammten von dem Ladungssystem auf den ausgewählten Punkt ausgeübten Kraft. Analog findet man die beiden anderen Componenten Y_0 und Z_0. Wir machen dann noch folgende leichte Umformung:

$$X_0 = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}} X_{0,\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\left(-\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_0}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{e}_0\,\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}} = \left\{-\frac{\partial}{\partial x_0}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right\}\cdot\mathfrak{e}_0,$$

wobei wir also den gemeinsamen Factor $\mathfrak{e}_0$ und die gemeinsame Operation $\frac{\partial}{\partial x_0}$ aus der Summe herausgezogen haben. Das Resultat ist:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \left\{-\frac{\partial}{\partial x_0}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right\}\cdot\mathfrak{e}_0,\\ Y_0 &= \left\{-\frac{\partial}{\partial y_0}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right\}\cdot\mathfrak{e}_0,\\ Z_0 &= \left\{-\frac{\partial}{\partial z_0}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}\right\}\cdot\mathfrak{e}_0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Man findet hiernach die Componenten der auf ein ausgewähltes elektrisches Theilchen 0 von den Theilchen 1 bis $\mathfrak{n}$ ausgeübten ponderomotorischen Kraft, indem man die negativen partiellen Differentialquotienten des Ausdrucks $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}$ nach den gleichgerichteten Coordinaten des ausgewählten Theilchens bildet und dann mit dessen Ladungsquantum $\mathfrak{e}_0$ multiplicirt. Die Proportionalität der Kraft mit der Gröſse $\mathfrak{e}_0$, auf welche die Wirkung sich erstreckt, ist ohne weiteres einleuchtend: Wenn ohne sonstige Aenderungen des Systems nur die Ladung des ausgewählten Körperchens verändert — etwa den zehnten Theil ihres früheren Betrages herabgesetzt wird, so

sinkt auch die auf sie wirkende Kraft an Intensität auf den zehnten Theil ohne indessen ihre Pfeilrichtung zu ändern, da alle drei Componenten der Gleichung (9) dadurch in gleichem Maafsstabe verjüngt werden. Zur Bildung der partiellen Differentialquotienten ist zu bemerken, dafs die Coordinaten des ausgewählten Punktes x_0, y_0, z_0 in sämmtlichen Summanden 1 bis $\mathfrak{n}$ vorkommen, wie man in dem Ausdruck für r_a in Gleichung (8) erkennt. Diese sind die drei unabhängigen Variabelen, nach denen differenzirt wird, während alle übrigen, mit x_a, y_a, z_a bezeichneten Abmessungen hierbei als unveränderliche Parameter des Systems auftreten. Man hat sich also die Ladungen 1 bis $\mathfrak{n}$ unverrückbar festgelegt zu denken; das Teilchen $\mathfrak{e}_0$ aber mufs beweglich gedacht werden, denn zur Auffindung der Differentialquotienten eines Ausdruckes mufs man doch die Variabelen immer ein wenig verändern, d. h. hier dem Punkt $x_0 y_0 z_0$ drei kleine Verschiebungen in den Coordinatrichtungen ertheilt denken.

§ 6. Das elektrische Feld eines Systems von punktförmigen Ladungen.

In Verfolgung dieser Vorstellungen kann man nun die bewegliche Ladung $\mathfrak{e}_0$ auch weiter verrücken, sie endlich in alle möglichen Stellungen zu dem festen Ladungssystem $\mathfrak{e}_1$ bis $\mathfrak{e}_\mathfrak{n}$ bringen, also an alle nicht von den festen Ladungen selbst eingenommenen Raumpunkte, so dafs die Abmessungen x_0, y_0, z_0 nichts anderes bedeuten, als die continuirlich variabeln Raumcoordinaten x, y, z. Für jede Lage geben die Gleichungen (9) die Werthe der drei Kraftcomponenten, also auch die Gröfse und Richtung der resultirenden Kraft, welche man in irgend einem geeigneten Maafsstab durch einen Pfeil versinnlichen kann. Zu jedem Raumpunkt gehört somit ein bestimmter Pfeil, und zwar sind diese Pfeile um so ähnlicher in Länge und Richtung je näher benachbart die Raumpunkte liegen, denen sie zugehören; weil ihre drei Componenten nach Gleichungen (9) bis auf die Ausnahmepunkte, in denen die festen Ladungen sitzen, überall stetige Functionen der Variabelen x, y, z (früher x_0, y_0, z_0 bezeichnet) sind.

Man nennt eine solche im allgemeinen stetig vertheilte Zuordnung einer Pfeilgröfse — eines Vectors — zu jedem Raumpunkt allgemein eine Vectorfunction des Ortes im Raume, und das ganze Raumgebiet, in dem diese Vectoranordnung definirt ist, das F e l d d e s V e c t o r s. Die Physik hat in verschiedenen Naturgebieten Felder von Vectoren zu betrachten; eines der, täglicher Anschauung

nächstliegenden, Beispiele bieten die Strömungen der Flüssigkeiten. Als Pfeile sind dabei in jedem von der Flüssigkeit durchströmten Raumpunkt die Geschwindigkeiten der dort befindlichen bewegten Massen anzusehen. Auch diese Pfeile zeigen im allgemeinen stetige veränderliche Anordnungen im Raume, bis auf besondere und interessante Ausnahmestellen. Sie verändern sich aber gewöhnlich auch mit der Zeit; nur die stationären Strömungen geben Vectorfelder, welche in ihrer Anordnung beständig bleiben, und deshalb ähneln gerade diese am meisten an den hier vorliegenden Fall, in dem die Zeit gar nicht als Variabele vorkommt.

Unser elektrostatisches Feld rührt her von den geladenen Punkten e_1 bis e_n, während der ebenfalls geladene Punkt e_0 gleichsam wie eine Sonde zur Prüfung der Stärke und Richtung des Vectors verwendet wird. Von diesem beweglichen Punkt steckt in dem Ausdruck der Feldcomponenten bisher noch der Factor e_0, durch welchen sie zu ponderomotorischen Kraftcomponenten auf den materiellen Träger dieser Sonde werden. Wir machen den weiteren Schritt, dafs wir die Sonde für eine Aeufserlichkeit erklären, das elektrische Feld also als ein an und für sich existirendes Ding, gewissermafsen als einen besonderen Zustand des Raumes oder eines den Raum durchdringenden Mediums; wobei freilich zu bemerken ist, dafs wir von dem Vorhandensein dieses Zustandes zunächst nur dadurch Kunde erhalten, dafs wir ein geladenes Körperchen, an die fragliche Stelle gebracht, von einer bestimmten ponderomotorischen Kraft angegriffen sehen. Als Maafs dieses unabhängig von dem Prüfungsteilchen existierend gedachten gerichteten Zustands nehmen wir die drei Componenten in Gleichungen (9), nachdem wir den Factor e_0 weggelassen, und nennen sie X, Y, Z, ohne Index. Jede ist Function der Raumcoordinaten x, y, z.

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{a=1}^{n}\frac{e_a}{r_a} \\ Y &= -\frac{\partial}{\partial y}\sum_{a=1}^{n}\frac{e_a}{r_a} \\ Z &= -\frac{\partial}{\partial z}\sum_{a=1}^{n}\frac{e_a}{r_a} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Dabei ist

$$r_a = \left|\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2+(z-z_a)^2}\right| \qquad (10\text{a})$$

Man nennt diesen Vector, dessen Componenten durch vorstehende Gleichungen (10) definirt sind, die **elektrische Feldstärke**. Auch

der Ausdruck elektrische Kraft ist dafür üblich und kann ohne Bedenken gebraucht werden, wenn man sich durch das vielseitig verwendete Wort „Kraft“ nicht täuschen läfst und stets bedenkt, dafs eine mechanische Kraft von der Dimension $[M L T^{2}]$ aus dieser Gröfse erst durch Multiplikation mit einem elektrischen Quantum entsteht. Da wir die Dimension des elektrischen Quantums im elektrostatischen Maafssystem bereits in Gleichung (2)

$$\mathfrak{e} = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

gefunden haben, können wir nun in demselben Maafssystem die Dimension der elektrischen Kraft oder Feldstärke $\mathfrak{E}$ dadurch finden, dafs sie die vorstehende Dimension von $\mathfrak{e}$ zu einer mechanischen Kraft ergänzen mufs. Es wird also

$$\mathfrak{E} = [M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}] \tag{11}$$

Zu dem gleichen Ergebnifs gelangt man auch, wenn man die Dimensionen der in den Gleichungen (10) rechts stehenden Ausdrücke zusammensetzt, wobei ∂x und r_a als zwei Längenfactoren im Nenner zur Dimension des elektrischen Quantums $\mathfrak{e}_a$ hinzutreten; die Componenten X, Y, Z haben natürlich dieselbe Dimension wie ihre Resultante. Auch die Maafseinheit der elektrischen Kraft ist hierdurch an das absolute elektrostatische (C. G. S.) System angeschlossen, und zu bezeichnen:

$$1\,(\text{cm}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{gr}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sec}^{-1}).$$

Zu der hier gegebenen Begriffsbildung des elektrischen Feldes einer Schaar von Punktladungen $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_n$ ist, um Unklarheiten vorzubeugen, noch folgendes zu bemerken. Wir haben das Feld durchmustert mit Hülfe eines beweglichen Prüfungspunktes mit der Ladung $\mathfrak{e}_0$. Die Anwesenheit dieser Ladung stört und verändert aber das Feld, macht sogar den Raumpunkt, wo sie liegt, zu einer Unendlichkeitsstelle der elektrischen Feldstärke. Dieses veränderte Feld würde man für eine beliebige Lage von $\mathfrak{e}_0$ feststellen können, wenn man nun noch einen vorher in hinreichender Entfernung gehaltenen neuen Prüfungskörper verwendet, während $\mathfrak{e}_0$ still gehalten wird. Nun erkennt man das Feld, an dessen Bildung sich aufser $\mathfrak{e}_1$ bis $\mathfrak{e}_n$ auch $\mathfrak{e}_0$ beteiligt. Wenn man also ein elektrisches Feld unter Verwendung einer Prüfungsladung durch die einwirkende ponderomotorische Kraft aufgenommen denkt, so beteiligt sich die Prüfungsladung nicht an der Bildung dieses Feldes, man erhält vielmehr für die Feldstärke diejenigen Werthe, welche herrschen würden, wenn

die Prüfungsladung nicht dort wäre. Der Prüfungskörper wird dadurch zu einer lediglich unsere Anschauung unterstützenden Fiktion, welche uns bereits gedient hat zur Auffindung der Ausdrücke für die Feldcomponenten in Gleichung (10), von welcher selbst aber in jenen Ausdrücken nichts vorkommt.

Durch die Angabe der drei Coordinaten-Componenten X, Y, Z ist der Vector $\mathfrak{E}$ vollständig bestimmt. Häufig hat man die Componente von $\mathfrak{E}$ zu bestimmen, welche in eine, von den Grundrichtungen verschiedene, vorgeschriebene Richtung l hineinfällt. Für diese Componente, welche wir $\mathfrak{E}_l$ nennen wollen, soll jetzt noch ein einfacher, den Gleichungen (10) analoger Ausdruck abgeleitet werden. Ganz allgemein findet man die Componente eines Vectors nach einer vorgeschriebenen Richtung, indem man den Pfeil, der den Vector darstellt, auf die gegebene Richtungslinie projicirt. Die Länge der Projection findet man durch Multiplication mit dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Richtungen:

$$\mathfrak{E}_l = \mathfrak{E} \cdot \cos\,(\mathfrak{E},\, l). \tag{12}$$

Nun ist aber aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt, dafs:

$$\left.\begin{aligned}\cos\,(\mathfrak{E},\, l) = \cos\,(\mathfrak{E}, x)\cdot\cos\,(l, x) + \cos\,(\mathfrak{E}, y)\cdot\cos\,(l, y)\\ + \cos\,(\mathfrak{E}, z)\cdot\cos\,(l, z).\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

Betrachtet man die auf der vorgeschriebenen Richtungslinie von irgend einem Nullpunkt aus abgemessene algebraische Abmessung l als unabhängige Variabele, so entsprechen einem Zuwachs ds drei ganz bestimmte Zuwachse der Coordinaten, dx, dy, dz, welche die Projectionen von dl sind. Man kann deshalb setzen:

$$\cos\,(l, x) = \frac{dx}{dl}, \qquad \cos\,(l, y) = \frac{dy}{dl}, \qquad \cos\,(l, z) = \frac{dz}{dl}. \tag{12b}$$

Andererseits ist:

$$\mathfrak{E}\cdot\cos\,(\mathfrak{E}, x) = X, \quad \mathfrak{E}\cdot\cos\,(\mathfrak{E}, y) = Y, \quad \mathfrak{E}\cdot\cos\,(\mathfrak{E}, z) = Z. \tag{12c}$$

Durch Verwendung dieser Formeln (12a, b, c) nimmt die Gleichung (12) folgende Form an:

$$\mathfrak{E}_l = X\cdot\frac{dx}{dl} + Y\cdot\frac{dy}{dl} + Z\cdot\frac{dz}{dl}. \tag{12d}$$

Führt man nun endlich noch für X, Y, Z die Ausdrücke aus Gleichung (10) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{E}_l = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum\frac{e_a}{r_a}\right)\cdot\frac{dx}{dl} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum\frac{e_a}{r_a}\right)\cdot\frac{dy}{dl} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum\frac{e_a}{r_a}\right)\cdot\frac{dz}{dl}. \tag{12e}$$

2*

Dieses Gebilde ist nun nichts anderes, als der nach der Variabelen l gebildete negative Differentialquotient der Function $\sum \frac{e_a}{r_a}$. Die Variable l steckt nicht explicite in dem Summenausdruck, aber die variabelen Raumcoordinaten x, y, z, von denen er durch die r_a explicite abhängt, sind hier als abhängige Functionen der Abmessung l anzusehen. Dem entspricht die Bildung des vorstehenden Ausdrucks, für welchen man kürzer schreibt:

$$\mathfrak{E}_l = -\frac{\partial}{\partial l}\sum_1^n \frac{e_a}{r_a}. \tag{13}$$

Hierin ist jede Bezugnahme auf ein bestimmtes Coordinatensystem verschwunden, denn auch die r_a, welche man zwar, wie in Gleichung (10a) geschehen, durch irgendwie festgelegte cartesische Coordinaten ausdrücken kann, haben doch davon unabhängige absolute Werthe, da sie den Abstand eines variabelen Raumpunktes von den Orten der festen Ladungen bezeichnen. Die Gleichungen für die Coordinaten-Componenten (10) endlich erscheinen als Specialfälle dieser Gleichung (13).

§ 7. Die Potentialfunction.

Um eine Vectorfunction im Raume anzugeben, braucht man im Allgemeinen für jeden Punkt drei besondere Angaben: entweder die drei Coordinaten-Componenten oder etwa die Intensität und die Richtung, welch' letztere zwei unabhängige Winkelangaben erfordert; bei einer analytisch darstellbaren Verteilung sind drei Functionen der Raumcoordinaten zur Darstellung erforderlich. Daraus ersieht man, dafs das hier gefundene Feld der elektrostatischen Kraft eine besondere Regelmäfsigkeit besitzt, denn die Kenntnifs einer einzigen Coordinatenfunction

$$\varphi = \sum_1^n \frac{e_a}{r_a} \tag{14}$$

genügt, um durch Bildung des negativen partiellen Differentialquotienten nach einer beliebigen Richtung die Componente des Vectors in dieser Richtung zu finden. Diese Function spielt bei der Betrachtung des elektrostatischen Feldes die gröfste Rolle. Sie wurde von George Green als Potentialfunction bezeichnet. Gauss nennt sie das Potential. In Bezug auf das Vorzeichen herrschen in der Litteratur verschiedene Gebräuche; namentlich bei älteren Autoren werden die Kraftcomponenten häufig als die positiven

Differentialquotienten dieser das Feld beherrschenden Gröfse eingeführt (z. B. GAUSS, JACOBI, RIEMANN), welche dann natürlich selbst das umgekehrte Vorzeichen erhalten mufs. Auch bei anderen Kraftfeldern, welche nicht dem Typus des COULOMB'schen Abstofsungsgesetzes oder des NEWTON'schen Attractionsgesetzes angehören, hat man Functionen von analoger Bedeutung herangezogen, welche man allgemein als Kräftefunctionen bezeichnet und deren Vorzeichen ebenfalls in jedem Falle erst festgestellt werden mufs. Wenn man consequent an dem gleichen Vorzeichen festhält, ist dasselbe übrigens gleichgültig, hier soll das in Gleichung (14) definirte durchgeführt werden. In sehr grofser Entfernung nähert sich φ dem Werthe Null, in der Nähe negativer Ladungen wird φ wegen des stark überwiegenden Summanden mit kleinem r_a im Nenner selbst auch negativ werden, in der Nähe positiver Ladungen aus demselben Grunde positiv. Da es übrigens zur Kenntnifs des Feldes nur auf die Differentialquotienten von φ ankommt, kann man stets einen für das ganze Feld constanten positiven oder negativen Werth addiren, welcher zwar die Beträge von φ in gleichem Maafse überall verändert, beim Differenziren aber wegfällt und die richtigen Werthe der Kraftcomponenten somit nicht stört. Die Function φ selbst ist keine gerichtete Gröfse, sie hat in jedem nicht von einer Ladung eingenommenen Punkte einen endlichen eindeutigen Werth und mit Ausnahme jener singulären Punkte auch einen stetigen Verlauf.

Die Componenten der elektrischen Feldstärke nach den Coordinatenrichtungen findet man aus der Potentialfunction φ zufolge der Gleichungen (10) und (14) folgendermaafsen:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{15}$$

Die Componente $\mathfrak{E}_l$ in einer beliebigen Richtung ist

$$\mathfrak{E}_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \tag{15a}$$

Die Resultante hat den Werth $\mathfrak{E} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, welcher unabhängig von der Orientirung des Axensystems ist, obwohl die einzelnen Coordinatcomponenten davon abhängen. Die Richtungscosinus der Resultante gegen die Axen sind $X/\mathfrak{E}$, $Y/\mathfrak{E}$, $Z/\mathfrak{E}$; auch ist

$$\mathfrak{E}_l = \mathfrak{E} \cdot \cos(\mathfrak{E}, l); \text{ vergl. Gleichung (12).} \tag{15b}$$

Wenn man also von einem Raumpunkt aus nach allen Richtungen hin den gleichen kleinen Schritt als ausgeführt denkt, so

werden die dabei gefundenen Componenten $\mathfrak{E}_l$ den Cosinus der Winkel zwischen der Pfeilrichtung $\mathfrak{E}$ und der Schrittrichtung dl proportional sein. Fällt die Richtung l mit $\mathfrak{E}$ zusammen, so hat der Cosinus seinen gröſsten Werth 1, die Componente ist gleich der Resultante und aus (15a) sieht man, daſs dies die Richtung ist, in welcher der negative Differentialquotient von φ seinen gröſsten positiven Betrag besitzt, also die Richtung, in welcher die Werte von φ am steilsten abfallen. In jeder auf dieser Richtung senkrechten ist $\cos(\mathfrak{E}, l) = o$, es liegt in diesen Richtungen gar keine Componente $\mathfrak{E}_l$ und deshalb hat nach (15a) die Function in diesen Richtungen kein Gefälle. Sucht man nach den Orten, an denen φ einen constanten Werth besitzt, so findet man dafür im Allgemeinen stetig gekrümmte Flächen, die Aequipotentialflächen oder Niveauflächen. Alle die Richtungen, in welchen wir kein Gefälle des Potentialwerthes finden, müssen also tangential zu den Aequipotentialflächen liegen, woraus direct weiter folgt, daß die resultierende Kraft überall senkrecht auf diesen Flächen steht. Aber nicht nur über die Richtung der Kraft erhält man hierdurch eine Anschauung, sondern auch über deren relative Gröſse an verschiedenen Stellen des Feldes. Verfolgt man nämlich zwei sehr nahe benachbart verlaufende Niveauflächen, für welche die beiden constanten Werthe von φ sich nur um eine sehr kleine Differenz unterscheiden, so sieht man ohne weiteres, daſs diese beiden Flächen geringeren Abstand haben müssen an Stellen, wo das steilste Gefälle gröſser ist, ja der Normalabstand beider Flächen muſs umgekehrt proportional diesem Gefälle, somit auch umgekehrt proportional der Gröſse der Kraft sein.

Bevor wir näher eingehen auf die mathematischen Eigenschaften der Potentialfunction, wollen wir in den nächsten zwei Paragraphen Betrachtungen einschieben über die Arbeits- und Energiegröſsen in einem System elektrischer Ladungen, welche sich durch die Potentialfunction ausdrücken lassen.

§ 8. Arbeitsleistung bei der Bewegung eines geladenen Theilchens im elektrischen Felde.

Wir kehren noch einmal zu den Vorstellungen des § 5 zurück und bewegen das ausgewählte Theilchen e_0 durch äuſsere Einwirkung langsam auf einer beliebig vorgeschriebenen Bahn durch den Raum. Die von den übrigen festen Ladungen e_1 bis e_n herrührende Kraft wird dabei entweder mithelfen, so daſs von auſsen eine Hemmung nöthig ist, um eine beschleunigte Bewegung zu verhindern, oder die

Kraft des Feldes wird sich der Bewegung widersetzen, so daſs man von auſsen einen Antrieb braucht. Im ersten Falle giebt das Ladungssystem inclusive $\mathfrak{e}_0$ Arbeit nach auſsen ab, im zweiten Falle nimmt es Arbeit von auſsen auf. Nur in dem besonderen Falle, daſs der vorgeschriebene Weg senkrecht zur elektrischen Kraft verläuft, findet keines von beiden statt. Diese Arbeitsgröſsen wollen wir nun aufsuchen, und zwar wollen wir in allen Fällen von Arbeit sprechen, welche das Ladungssystem nach auſsen abgiebt; diese ist dann im ersten Falle positiv, im zweiten negativ zu rechnen.

Definirt wird die Arbeit bei der Verrückung dl durch das Product aus dem Wege und der in dessen Richtung fallenden mechanischen Kraftcomponente; letztere ist in unserem Systeme die mit $\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{E}_l$ bezeichnete Gröſse. Diese Arbeitsbeträge summiren sich algebraisch über alle Wegelemente, liefern daher für einen endlichen vorgeschriebenen Weg eine Summe, welche man schreiben kann:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dl \cdot \mathfrak{e}_0 \, \mathfrak{E}_l = \mathfrak{e}_0 \int_{(1)}^{(2)} dl \cdot \mathfrak{E}_l. \tag{16}$$

Hier soll die untere Grenze (1) den Anfangspunkt des Weges, die obere Grenze (2) dessen Endpunkt bezeichnen.

Bei einer beliebig vorgeschriebenen räumlichen Vertheilung des Vectors würde dieses Linienintegral durchaus von der Wegführung zwischen (1) und (2) in seinem Werthe beeinfluſst werden, so daſs die bloſse Angabe der Grenzen zur Bestimmung nicht ausreicht. Bei unserem elektrostatischen Felde ist aber $\mathfrak{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$, wo φ nach Gleichung (14) eine eindeutige und stetige Function im Raume ist. Setzen wir also nur voraus, daſs der Weg nicht durch eine der festen Punktladungen hindurch führt (was sich ja schon durch die Anwesenheit der ponderablen Träger verbietet), so ist:

$$A = - \mathfrak{e}_0 \int_{(1)}^{(2)} dl \, \frac{\partial \varphi}{\partial l} = - \mathfrak{e}_0 (\varphi_2 - \varphi_1) = \mathfrak{e}_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \tag{16a}$$

Der Werth der Arbeit zeigt sich hiernach unabhängig von der Führung des Weges; er wird direct gemessen durch die Abnahme der Function φ, und diese ist gleich der Differenz der Werthe φ_1 im Anfangspunkt und φ_2 im Endpunkt. Nehmen wir die Ladung $\mathfrak{e}_0$ positiv an, so ist die vom System abgegebene Arbeit positiv, wenn $\varphi_1 > \varphi_2$ ist, wenn also die bewegliche Ladung zu Stellen

niedrigeren Potentialwerthes geführt wird, dagegen nimmt das System (inclusive $\mathfrak{e}_0$) Arbeit von aufsen auf, wenn das positive Theilchen zu Stellen höheren Potential gerückt wird. Bei Verrückungen in ein und derselben Aequipotentialfläche wird Arbeit weder abgegeben noch aufgenommen, dasselbe gilt, wenn (1) und (2) auf der nämlichen Aequipotentialfläche liegen, während der Zwischenweg diese Fläche verläfst. Daraus folgt noch im Besonderen, dafs die Arbeitssumme gleich Null ist, wenn der Endpunkt mit dem Ausgangspunkt zusammenfällt, wenn also ein beliebiger geschlossener Weg durchlaufen wird. Es ergiebt sich daraus die Unmöglichkeit mit elektrostatischen Kräften eine Arbeitsmaschine etwa dadurch zu treiben, dafs man eine Ladung $\mathfrak{e}_0$ fortdauernd im Kreise umlaufen läfst. Was dabei während einiger Theile des Umlaufs gewonnen wird, geht während der übrigen Theile genau wieder verloren.

Noch eine besondere Anwendung der Gleichung (16a) wollen wir betrachten. Legt man den Endpunkt (2) des Weges in sehr grofse Entfernung von allen geladenen Körpern, so nähert sich der Werth φ_2 der Grenze Null, und die geleistete Arbeit bei dieser Wegführung des Theilchens wird $A_\infty = \mathfrak{e}_0 \cdot \varphi_1$. Besitzt aufserdem die bewegliche Ladung den Werth $\mathfrak{e}_0 = +1$, so wird dem Zahlenwerthe nach

$$A_\infty = \varphi_1, \tag{16b}$$

wenn man A_∞ in Erg (d. i. $1\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$) und φ_1 in absuluten elektrostatischen Potentialeinheiten (d. i. $1\,\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$) mifst. Es ist indessen zu beachten, dafs diese einfache Gleichung nur für die Maafszahlen gilt, dafs die Dimensionen aber erst dann gleich werden, wenn man die rechte Seite mit der absoluten elektrostatischen Ladungseinheit (d. i. $1\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$) erweitert. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung $A_\infty = \varphi_1$ eine einfache Deutung des Potentialbegriffs: Den Werth des Potentials an einer Stelle eines elektrischen Feldes findet man, wenn man dorthin die positive Ladungseinheit versetzt denkt und die Arbeit mifst, welche bei dessen Entführung aus dem Wirksamkeitsbereich der anderen Ladungen nach aufsen abgegeben wird. Oder umgekehrt: Der Potentialwerth an einem Orte des Raumes ist numerisch gleich der Arbeit, welche man von aufsen aufwenden mufs, um ein mit der positiven Einheit beladenes Körperchen aus unendlicher Entfernung (in welcher weit und breit keine anderen Ladungen liegen) bis zu dem betreffenden Orte heranzuführen. An Stelle der unendlichen Entfernungen vom Ladungsbereich können auch andere im Endlichen gelegene Orte treten, von

welchen man weifs, dafs in ihnen das Potential den Werth Null hat. Dafs man Orte von dieser Eigenschaft mitunter leicht finden kann, sei an einem einfachen Beispiel gezeigt: Das feste Ladungssystem bestehe aus nur zwei Punkten, welche die entgegengesetzt gleichen Ladungen $+ \mathfrak{e}$ und $- \mathfrak{e}$ tragen. Dann ist die Potentialfunction nach Gleichung (14)

$$\varphi = \mathfrak{e}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

wo r_1 den Abstand von dem positiven, r_2 den Abstand von dem negativen Theilchen bedeutet. Dieser Ausdruck verschwindet nicht nur in unendlicher Entfernung, sondern auch in allen Punkten der Ebene, welche mitten zwischen den beiden Ladungen quer steht, weil dort überall $r_1 = r_2$ ist. Es mag auch hier schon erwähnt werden, dafs an jedem mit der für unsere Betrachtungen unendlich grofsen, feuchten Erdrinde in leitende Verbindung gesetzten Conductor das Potential gleich Null zu setzen ist; wenigstens ist dies in allen Fällen zulässig, in denen man nicht weit ausgedehnte Versuchsanordnungen zum Studium terrestrischer oder meteorologischer Potentialdifferenzen zu betrachten hat.

§ 9. Potentielle Energie eines Systems von vielen geladenen Punkten.

Im vorigen Paragraphen handelte es sich um Arbeitsgröfsen, welche von einem elektrischen Ladungssystem abgegeben werden durch die Bewegung eines ausgewählten Theilchens $\mathfrak{e}_0$. Der Arbeitsvorrath ist die potentielle Energie aller der geladenen Theilchen inclusive $\mathfrak{e}_0$ und hängt von sämmtlichen Ortscoordinaten ab, nur liefsen wir sie bis auf diejenigen des einen Punktes alle constant. Diese Beschränkung wollen wir jetzt aufheben und damit auch die Sonderstellung der Ladung $\mathfrak{e}_0$. Wir betrachten ein System von punktförmigen Ladungen, welche mit $1, 2, 3, \ldots . \mathfrak{n}$ numerirt sind. Für jedes Paar von Punkten mit verschiedenen Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann man den Ausdruck $\frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}_\mathfrak{b}}{r_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}$ bilden, in welchem $r_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ den Abstand beider Punkte bezeichnet. Läfst man nun sowohl $\mathfrak{a}$ wie $\mathfrak{b}$ alle Ordnungszahlen durchlaufen, so bekommt man eine ganze Schaar solcher Ausdrücke (nur die Fälle $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ sind auszuschliefsen) und jeder Ausdruck kommt zweimal vor, z. B. $\frac{\mathfrak{e}_2 \cdot \mathfrak{e}_5}{r_{2,5}}$ sowohl für $\mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{b} = 5$ als auch für $\mathfrak{a} = 5$, $\mathfrak{b} = 2$.

Die einfache Summe aller dieser Ausdrücke kann man daher folgendermaafsen schreiben:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{n}}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{n}}{}' \frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}_\mathfrak{b}}{r_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} \qquad \mathfrak{a} \text{ nicht } = \mathfrak{b}. \tag{17}$$

Sie ist eine Function sämtlicher Coordinaten der geladenen Punkte. Wir suchen ihren Differentialquotienten nach irgend einer einzelnen Coordinate, die wir mit $x_\mathfrak{i}$ bezeichnen wollen. Alle Glieder der Doppelsumme, in welchen weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ gleich dem Index $\mathfrak{i}$ ist, fallen dabei weg, es bleiben nur diejenigen übrig, in denen $\mathfrak{a} = \mathfrak{i}$ ist und diejenigen, in denen $\mathfrak{b} = \mathfrak{i}$ ist, also zwei einfache Summen, welche aus dem Gesammtinhalt von Φ herausgehoben sind.

Bezeichnen wir deren Wert mit $\Phi_\mathfrak{i}$

$$\Phi_\mathfrak{i} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{\mathfrak{b} \text{ nicht } \mathfrak{i}}{}' \frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{e}_\mathfrak{b}}{r_{\mathfrak{i}\mathfrak{b}}} + \sum_{\mathfrak{a} \text{ nicht } \mathfrak{i}}{}' \frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}_\mathfrak{i}}{r_{\mathfrak{a}\mathfrak{i}}}\right\}.$$

Die beiden einfachen Summen sind aber identisch mit einander, daher kann man die Reihe der bei der Differentiation nach $x_\mathfrak{i}$ zu beachtenden Glieder kürzer schreiben:

$$\Phi_\mathfrak{i} = \mathfrak{e}_\mathfrak{i} \sum_{\mathfrak{a} \text{ nicht } \mathfrak{i}}{}' \frac{\mathfrak{e}_\mathfrak{a}}{r_{\mathfrak{a}\mathfrak{i}}}. \tag{18}$$

Durch das Heraustreten des gemeinsamen Factors $\mathfrak{e}_\mathfrak{i}$ hat der jetzt übrig gebliebene Summenausdruck die Form angenommen, welche wir bereits in Gleichung (14) aufgestellt haben, und welche schon vorher, z. B. in den Gleichungen (9), vorkam, nur mit dem Unterschiede, dafs hier die Coordinaten des Theilchens $\mathfrak{i}$ an der Stelle der variabelen Raumcoordinaten oder derer des früheren Theilchens 0 stehen. Diese Summe ist also das Potential, welches die elektrischen Ladungen nach Entfernung des Theilchens $\mathfrak{e}_\mathfrak{i}$ an dem Orte dieses Theilchens erzeugen. Bezeichnen wir es mit $\varphi_\mathfrak{i}$, so können wir die Gleichung (18) schreiben:

$$\Phi_\mathfrak{i} = \mathfrak{e}_\mathfrak{i}\,\varphi_\mathfrak{i}. \tag{18 a}$$

Auch der vollständige Ausdruck Φ läßt sich hieraus zusammensetzen, wenn man der Reihe nach $\mathfrak{i} = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n}$ setzt und addirt. Es ist

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{n}} \Phi_\mathfrak{i} = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{i}=1}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{e}_\mathfrak{i}\,\varphi_\mathfrak{i}. \tag{19}$$

Der Factor $\frac{1}{2}$ ist auch hier nöthig, um nicht jedes Punktpaar doppelt zu zählen.

Wir hatten ein einzelnes bestimmtes Φ_i abgesondert, um den Differentialquotienten von Φ nach x_i zu bilden. Es ist nunmehr

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = e_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} .$$

Wir wissen aber bereits, dafs $-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} e_i = X_i e_i$ die x-Componente der ponderomotorischen Kraft angiebt, welche das Theilchen mit der Ladung e_i von allen übrigen zusammen erfährt. Es ist mithin:

und ganz analog

$$\left.\begin{aligned} X_i e_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \\ Y_i e_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \\ Z_i e_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} . \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Die negativen Differentialquotienten der in Gleichung (17) aufgestellten Funktion Φ nach den einzelnen Coordinaten des Systems liefern also die Componenten der inneren ponderomotorischen Kräfte, welche jene Coordinaten beschleunigen und denen durch äufsere mechanische Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden mufs, um das System in Ruhe zu halten.

Wir wollen uns nun das System elektrischer Punkte in einer gegebenen Lage oder Configuration vorstellen und sodann jedem Punkte eine kleine Verrückung ertheilen, welche vollständig angegeben wird durch die Variationen sämmtlicher Coordinaten. Diese seien für den Punkt a bezeichnet mit δx_a, δy_a, δz_a, so dafs der Ort dieses Punktes nunmehr durch die Coordinaten $x_a + \delta x_a$, $y_a + \delta y_a$, $z_a + \delta z_a$ bestimmt ist. Die Function Φ verändert dabei ihren ursprünglichen Werth um einen kleinen Betrag $\delta \Phi$, den man die Variation von Φ nennt. Sie hängt durchaus ab von der Wahl der Verrückungen und läfst sich durch diese linear und homogen ausdrücken, ganz so wie das Differential einer Function vieler Variabeler:

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots$$

oder in Summenform:

$$\delta \Phi = \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \delta x_a + \frac{\partial \Phi}{\partial y_a} \delta y_a + \frac{\partial \Phi}{\partial z_a} \delta z_a \right) . \qquad (21)$$

Hier hinein setzen wir die soeben gefundenen Bedeutungen der Differentialquotienten von Φ als Kraftcomponenten und finden:

$$-\delta\,\Phi = \sum_{a=1}^{n} \{ e_a (X_a\,\delta x_a + Y_a\,\delta y_a + Z_a\,\delta z_a) \}. \tag{21a}$$

Jeder einzelne Summand der rechten Seite stellt die mechanische Arbeit, welche die von den übrigen Ladungen (aufser a) herrührenden Abstofsungs- oder Anziehungskräfte bei der Verrückung des Punktes a leisten; denn wenn wir die Resultante von X_a, Y_a, Z_a mit $\mathfrak{E}_a$ und die aus δx_a, δy_a, δz_a resultirende Verrückung mit δl_a bezeichnen, endlich den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen α nennen, so ist:

$$e_a (X_a\,\delta x_a + Y_a\,\delta y_a + Z_a\,\delta z_a) = (e_a\,\mathfrak{E}_a \cos\alpha) \cdot \delta l_a.$$

Der erste Factor rechts ist die in die Wegrichtung fallende Kraftcomponente; diese giebt, mit der Weglänge multiplicirt, die Arbeit bei der Verrückung des Theilchens a. Ueber alle a summirt erhalten wir die gesammte bei der Verrückung des Systems von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit A; und diese ist nach Gleichung (21a) der negativen Variation der Function Φ gleich $-\delta\,\Phi = A$. Mit anderen Worten: Φ nimmt um so viel ab, als die elektrischen Kräfte bei der Verrückung Arbeit gespendet haben, oder falls die Verrückungen so gewählt sind, dafs sie überwiegend entgegen den Richtungen führen, in welchen die inneren Kräfte die Ladungen zu treiben streben, so nimmt Φ um so viel zu, als bei der Verrückung Arbeit von aufsen aufgewendet wurde. Die Function Φ ist daher das Maafs für den Arbeitsvorrath in dem System, sie stellt die potentielle Energie der elektrostatischen Kräfte dar, welche wir für ein einzelnes Punktpaar schon in § 4 aufgefunden haben.

Bei der Ableitung dieser Eigenschaft mufsten wir die Variation der Coordinaten verschwindend klein voraussetzen, weil sonst der einfache Ausdruck für $\delta\,\Phi$ in Gleichung (21) nicht ausreichend gewesen wäre. Diese Beschränkung kommt im Wesentlichen darauf hinaus, dafs man die auf ein Theilchen wirkende Kraft auf dem ganzen Verrückungswege constant setzen darf, auch unbeeinflufst durch die gleichzeitigen Verrückungen der anderen Punkte. Diese Beschränkung können wir jetzt fallen lassen. Jede endliche Configurationsänderung des Systems kann man zu Stande gebracht denken durch die Aufeinanderfolge sehr vieler kleiner, für welche der Satz jetzt bewiesen ist. Diese Zwischenzustände sind sogar auf unendlich mannigfaltige Weise wählbar, vorgeschrieben mufs nur die Anfangs-

configuration und die Endconfiguration sein. Die $\delta\,\Phi$ der einzelnen Theilprozesse summiren sich dabei zu einem endlichen Betrage, dessen Werth gleich der Differenz zwischen dem Endwerth Φ_2 und dem Anfangswerth Φ_1 sein mufs. Diese beiden Werthe kann man aber aus den Coordinaten der Anfangs- und Endlage berechnen, ohne dafs man die Zwischenlagen zu kennen braucht. Der Gleichung $-\delta\,\Phi = A$ für kleine Verrückungen entspricht daher für endliche Lagenänderungen folgende:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = A \tag{22}$$

Die Abnahme von Φ mifst die vom Systeme geleistete, nach aufsen abgegebene Arbeit.

Wählt man als Endlage eine vollständige Zerstreuung aller Ladungen in unendlicher Ferne, so dafs alle gegenseitigen Kraftwirkungen verschwinden, so wird auch der Ausdruck Φ in Gleichung (17) wegen der unendlich grofsen r_{ab} in den Nennern verschwinden. Man darf dann $\Phi_2 = 0$ setzen und es wird:

$$\Phi_1 = A_\infty \tag{22a}$$

Dem entsprechend kann man sagen: Die potentielle Energie eines elektrischen Systems ist der Werth der Arbeit, die man von aufsen gebraucht hat, um die im Unendlichen verstreuten Ladungen gegen die Abstofsungskräfte zusammen zu führen zu der gegebenen Configuration. Nach dieser Auffassung enthält die potentielle Energie keine willkürliche additive Constante (der Ausdruck in Gleichung (17) gleichfalls nicht). Der Arbeitsvorrath kann positiv, Null, auch negativ sein, ohne dafs in letzteren beiden Fällen das System aufser Stande wäre, noch Arbeit zu leisten. Führt man z. B. ein positiv und ein negativ geladenes Theilchen aus unendlicher Entfernung zusammen auf einen endlichen Abstand, so sinkt die potentielle Energie von Null beginnend ins Negative hinab, die Anziehungskraft arbeitet bei der Annäherung. Das System kann aber immer noch mehr Arbeit abgeben, wenn man den Ladungen gestattet sich, noch mehr zu nähern.

Um die Vorstellung negativer Arbeitsvorräthe zu vermeiden, kann man nun zu der Function Φ immer eine hinreichend große Constante hinzu addiren, ohne dafs die Bedeutung der Function dadurch geändert wird. In der Gleichung (17) und auch in (22a) mufs dann freilich der Werth dieser Constanten rechts als Summand zugefügt werden, aber alle Beziehungen, in denen nur Differenzen zweier Werthe von Φ oder nur Differentialquotienten von Φ vor-

kommen, bleiben ungeändert durch eine additive Constante zu Φ, so z. B. die Gleichung (22) und die Ausdrücke der Kraftcomponenten in den Gleichungen (20).

Es sei schon hier darauf hingewiesen, dafs der Gesammtbetrag der Energie eines elektrostatischen Feldes stets positiv ist, auch ohne dafs man noch eine Constante hinzufügt. Bisher haben wir noch nicht von den Arbeitsbeträgen gesprochen, welche zur Concentrirung der Punktladungen notwendig sind. Näheres darüber siehe § 25.

§ 10. Die Potentialfunction eines Systems elektrischer Punkte genügt der Differentialgleichung von Laplace.

Nachdem wir die potentielle Energie eines Systems elektrischer Punkte kennen gelernt haben und auch gefunden haben, dafs diese sich als einfache Summe von Potentialfunctionen, jede multiplicirt mit einem elektrischen Quantum, darstellen läfst [Gleichung (19)], wollen wir zu den Potentialfunctionen als den einfacheren Begriffen zurückkehren und weitere charakteristische Eigenschaften derselben aufsuchen. Zuerst wollen wir deductiv zeigen, dafs φ als Function der Variabelen x, y, z einer bestimmten sehr allgemeinen Differentialgleichung genügt.

Denken wir uns nur eine einzige positive Ladung $\mathfrak{e}_1$ in dem Raumpunkt x_1, y_1, z_1 festliegend, so erzeugt diese ein elektrostatisches Feld, dessen Pfeile überall radial von dem geladenen Punkte wegweisen, und an Länge mit wachsendem Abstand abnehmen, wie das reciproke Quadrat dieses Abstandes. Die Aequipotentialflächen sind concentrische Kugelflächen um den geladenen Punkt. Die Potentialfunction, die wir φ_1 nennen, ist:

$$\varphi_1 = \frac{\mathfrak{e}_1}{r_1}, \qquad r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}. \tag{23}$$

Wir wollen nun die Differentialquotienten von φ_1 nach den darin steckenden Variabelen x, y, z bilden. Man findet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -\frac{\mathfrak{e}_1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} = -\mathfrak{e}_1 \frac{x - x_1}{r_1^3} \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= -\mathfrak{e}_1 \frac{y - y_1}{r_1^3} \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\mathfrak{e}_1 \frac{z - z_1}{r_1^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{23a}$$

Diese Ausdrücke sind mit Ausnahme der Stelle $x_1 y_1 z_1$ im ganzen Raume endlich und stetig.

Differenziren wir nochmals nach den gleichgerichteten Coordinaten, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= -\,e_1 \frac{1}{r_1^{\,3}} + e_1 \frac{3(x-x_1)^2}{r_1^{\,5}}\\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= -\,e_1 \frac{1}{r_1^{\,3}} + e_1 \frac{3(y-y_1)^2}{r_1^{\,5}}\\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= -\,e_1 \frac{1}{r_1^{\,3}} + e_1 \frac{3(z-z_1)^2}{r_1^{\,5}}\,.\end{aligned}\right\} \tag{23b}$$

Auch diese zweiten Differentialquotienten sind mit Ausnahme derselben einen Stelle im Raume überall endlich und stetig. Bilden wir nun die Summe dieser letzten drei Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = -\,e_1 \frac{3}{r_1^{\,3}} + e_1 \frac{3\{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\}}{r_1^{\,5}}\,.$$

Da aber die geschweifte Klammer im Zähler des zweiten Summanden der rechten Seite gleich $r_1^{\,2}$ ist, welches sich gegen zwei Factoren r_1 im Nenner hebt, so ist das zweite Glied $+\,e_1 \frac{3}{r_1^{\,3}}$, der ganze Ausdruck mithin gleich Null:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0. \tag{24}$$

Dies ist eine sehr allgemeine partielle homogene lineare Differentialgleichung, deren Integrale zuerst von LAPLACE studirt worden sind, und die man deshalb die LAPLACE'sche Differentialgleichung nennt. Die Summe der drei zweiten Differentialquotienten, für welche das abkürzende Zeichen $\Delta \varphi_1$ (oder auch $\nabla^2 \varphi_1$) in Gebrauch ist, wird auch wohl als LAPLACE'sche Operation bezeichnet. Dieselbe ist hier bezogen auf ein bestimmtes Coordinatensystem, es sei aber gleich erwähnt, dafs sie eine davon unabhängige Bedeutung hat [vergl. z. B. Band II, S. 111, Gleichung (54e)], und auch in anderen als cartesischen Coordinaten ausgedrückt werden kann.

Für unsere Potentialfunction φ_1 mufs also die Eigenschaft

$$\Delta \varphi_1 = 0 \tag{24a}$$

an allen Stellen des Raumes erfüllt sein. Nur an der Stelle x_1, y_1, z_1, wo die felderzeugende Ladung e_1 ihren Sitz hat, können wir nichts

darüber aussagen, denn dort wird der mathematische Werth von $\varphi_1 = \mathfrak{e}_1/r_1$ unendlich und dessen Differentialquotienten, die in (23a und b) gebildet wurden, werden dies in noch höherem Grade und verlieren auch jeden bestimmten Sinn. Physikalisch können wir auch nichts weiter aussagen, als dafs es geladene Punkte ohne jede Ausdehnung nicht giebt, dafs daher das Potential dicht um das Centrum herum einen anderen physikalischen Verlauf haben wird, als der mathematische Ausdruck $\mathfrak{e}_1/r_1$ angiebt.

Haben wir nun noch an anderen Stellen $x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \ldots$ Punkte mit den Ladungen $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 \ldots$ und nennen wir die Abstände von diesen Punkten $r_2, r_3, \ldots$, so gelten für die Potentialfunctionen, welche jeder dieser Ladungen für sich allein zugehören, also für $\varphi_2 = \frac{\mathfrak{e}_2}{r_2}$, $\varphi_3 = \frac{\mathfrak{e}_3}{r_3}, \ldots$ Differentialgleichungen von der nämlichen Form, jede hat ihre Ausnahmestelle in dem geladenen Centrum. Es ist

$\Delta \varphi_2 = 0$ überall aufser an der Stelle x_2, y_2, z_2,
$\Delta \varphi_3 = 0$ überall aufser an der Stelle x_3, y_3, z_3
etc.

Die gleichzeitige Anwesenheit eines ganzen Systems von Punktladungen erzeugt eine Potentialfunction

$$\varphi = \frac{\mathfrak{e}_1}{r_1} + \frac{\mathfrak{e}_2}{r_2} + \frac{\mathfrak{e}_3}{r_3} + \ldots\ldots$$

In jedem geladenen Punkte wird einer der rechtsstehenden Summanden unendlich und damit die ganze Summe φ ebenfalls unendlich. Wir wollen nun $\Delta \varphi$ bilden. Da die Operation $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ einen linearen homogenen Ausdruck liefert, ist Δ von einer Summe gleich der Summe der Δ von den einzelnen Summanden, also:

$$\Delta \varphi = \Delta \frac{\mathfrak{e}_1}{r_1} + \Delta \frac{\mathfrak{e}_2}{r_2} + \Delta \frac{\mathfrak{e}_3}{r_3} + \ldots\ldots$$

Die Glieder rechts sind, wie wir gesehen haben, im Allgemeinen überall gleich Null, nur gilt dies für das erste Glied nicht an der Stelle, wo $\mathfrak{e}_1$ liegt, für das zweite nicht an der Stelle $\mathfrak{e}_2$, und so weiter. Es folgt also

$$\Delta \varphi = 0 \tag{25}$$

mit Ausnahme aller Stellen 1, 2, 3, ...

Die Potentialfunction eines Systems geladener Punkte genügt also im ganzen Raume mit Ausnahme der Orte der Punktladungen selbst der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

§ 11. Continuirlich verbreitete Ladungen in räumlichen Bezirken.

Wir wollen nun dazu übergehen, uns an Stelle der diskreten elektrisch geladenen Punkte continuirlich verbreitete Ladungen vorzustellen. An ponderabler Substanz müssen wir die Ladungen stets haftend denken. Wir wollen auch für den Anfang annehmen, dafs die Vertheilungen unverrückbar festgehalten werden, dafs sie sich also nicht etwa erst zu einem Gleichgewichtszustand der elektrischen Kräfte zurechtschieben, wie dies in metallischen oder flüssigen Körpern geschieht, in welchen entweder die Elektricitäten oder aber die ponderablen Träger frei fliefsen können. Wir denken uns also die Träger als feste vollkommene Isolatoren und die Vertheilungen der Elektricitäten als willkürlich und unveränderlich vorgeschrieben. Die erste mögliche Vorstellung ist die, dafs die Elektricität mit endlicher räumlicher Dichtigkeit in einem oder mehreren Körpern verbreitet ist; ein endliches Quantum ist dann in einem endlichen Volumen enthalten; die Raumdichtigkeit ε der Ladung an einer Stelle ist der Grenzwert, dem sich das Verhältnifs des elektrischen Quantums zum damit ausgefüllten Volumen bei verschwindender Gröfse des letzteren nähert. Dadurch wird bei bekannter Vertheilung die Dichtigkeit ε eine bekannte Function des Ortes im geladenen Körper. Diesen Ort wollen wir durch die Cartesischen Coordinaten ξ, η, ζ bezeichnen. Stetig braucht die Function ε nicht zu sein, aber wir wollen sie als überall endlich voraussetzen.

Der Dimension nach ist die elektrische Raumdichtigkeit gleich Elektricitätsmenge dividirt durch Volumen, also im elektrostatischen Maafssysteme nach Gleichung (2)

$$\varepsilon = [L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}] \cdot \tag{26}$$

Ihre Einheit im C.G.S.-System ist eine aufserordentlich geringe Gröfse, da eine Ladungseinheit, deren Kleinheit am Schlusse von § 2 bereits geschildert wurde, ein ganzes Cubikcentimeter ausfüllt.

Wenn wir nun die Potentialfunction des elektrischen Feldes suchen, welches eine räumlich stetige Elektricitätsvertheilung erzeugt, so können wir die bei den Systemen geladener Punkte aufgestellten Begriffe und Formeln auf den vorliegenden Fall übertragen.

An die Stelle eines geladenen Punktes tritt hier ein geladenes Volumelement, in welchem das Quantum $\varepsilon \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ enthalten ist. Liegt dieses an der Stelle ξ, η, ζ, so erzeugt es in einem Raumpunkt x, y, z, dessen Abstand von dem Volumelement also

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ist, ein Potential $d\varphi$ von der Größe

$$d\varphi = \frac{\varepsilon \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta}{r}.$$

An die Stelle der Summation über die Potentiale, die von vielen geladenen Punkten herrühren, tritt hier die Integration des Ausdrucks $d\varphi$ über alle geladenen Volumelemente:

$$\varphi = \iiint d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \frac{\varepsilon}{r}. \tag{27}$$

Hier kommen die Integrationsvariabelen ξ, η, ζ sowohl in der Funktion ε, als auch in r vor, während in r die Ortscoordinaten x, y, z des Punktes, für welchen der Wert φ gesucht wird, die Rolle fester Parameter spielen. Darum ist auch φ eine Function von x, y, z, während die Integrationsvariabelen durch die festen Grenzen des bestimmten Integrals verdrängt sind.

Liegt der Punkt x, y, z aufserhalb des geladenen Körpergebiets an einer von Elektricität leeren Stelle, wo $\varepsilon = 0$ ist, so sind alle im Integranden vorkommenden Abstände r von endlicher Gröfse; das Potential φ ist dort ebenso sicher endlich und stetig, wie es bei punktförmigen Ladungen an leeren Stellen ist. Es läfst sich auch auf analoge Weise, wie im vorigen Paragraphen beweisen, dafs das Potential einer continuirlich räumlichen Elektricitätsvertheilung in den von Ladungen freien umgebenden Raumtheilen der LAPLACE'schen Differentialgleichung folgt, denn die Operation Δ, für die Parameter x, y, z an dem Integral ausgeführt, kann, da diese Parameter nicht in den Grenzen vorkommen, an dem Integrandus vorgenommen werden:

$$\Delta\varphi = \Delta \iiint d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \frac{\varepsilon}{r} = \iiint d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \Delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) = 0. \tag{27a}$$

Liegt dagegen der Punkt x, y, z innerhalb des geladenen Gebietes, so werden die direkten Uebertragungen aus der Theorie des Potentials von Punktladungen hinfällig, weil r für denjenigen Theil

der Integralsumme, in welchem der Punkt selbst liegt, verschwindend klein, der Integrand also unendlich grofs wird.

Wir wollen nun zeigen, dafs trotzdem bei endlicher Dichtigkeit $\mathfrak{s}$ das Integral φ einen bestimmten endlichen Werth behält. Wir führen statt der rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ ein Polarcoordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt im Innern des geladenen Gebietes an der Stelle x, y, z liegt, für welche wir den Werth von φ suchen. Dann ist

$$\xi - x = r\cos\vartheta,$$
$$\eta - y = r\sin\vartheta\cdot\cos\eta,$$
$$\zeta - z = r\sin\vartheta\cdot\sin\eta$$

und das Volumelement ist

$$d\tau = dr\cdot d\vartheta\cdot d\eta\cdot r^2\sin\vartheta.$$

Mithin

$$\varphi = \iiint dr\, d\vartheta\, d\eta\, r^2 \sin\vartheta\cdot\frac{\mathfrak{s}}{r} = \iiint dr\, d\vartheta\, d\eta\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\mathfrak{s}. \qquad (28)$$

Legen wir um den Anfangspunkt eine Kugelfläche mit dem kleinen Radius ϱ, so wird das Integrationsgebiet dadurch in den Raum aufserhalb und innerhalb der Kugelfläche zerschnitten und dem entsprechend zerfällt auch das Raumintegral φ in zwei Theile. Derjenige Theil, welcher die Integration über den äufseren Raum enthält, ist sicher endlich, denn die Stelle, an der $r = 0$ wird, ist ja durch die kleine Kugel herausgeschnitten. Wir haben es daher nur zu thun mit dem Integral über den Kugelraum selbst, welches wir φ_ϱ nennen:

$$\varphi_\varrho = \int_0^\varrho dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\eta\cdot r\cdot\mathfrak{s}\cdot\sin\vartheta. \qquad (28\text{a})$$

Der Mittelwerth der elektrischen Dichtigkeit in der Kugel, $\bar{\mathfrak{s}}$, ein nach unseren Voraussetzungen endlicher Betrag, kann vor das Integral gesetzt werden, welches sich dann leicht ausführen läßt

$$\varphi_\varrho = \bar{\mathfrak{s}}\cdot 2\pi\int_0^\varrho r\,dr\cdot\int_0^\pi d\vartheta\cdot\sin\vartheta = 2\pi\bar{\mathfrak{s}}\varrho^2. \qquad (28\text{ b})$$

Aus dem Factor ϱ^2 erkennt man, dafs mit verschwindendem Radius ϱ auch der Integralwerth über das Innere der Kugel gegen Null strebt und damit ist bewiesen, dafs das Potential räumlich verbreiteter Ladungen auch im Inneren der geladenen Bereiche

endlich bleibt. Wir können den Satz sogar noch erweitern, indem wir zeigen, dafs die elektrische Dichtigkeit in einem Punkte sogar in gewisser Weise unendlich werden darf, ohne dafs dort für φ das Gleiche gilt. Setzen wir z. B. folgende Vertheilung an:

$$\varepsilon = \frac{A}{r^{\varkappa}}, \tag{29}$$

wo A eine Constante und $\varkappa$ eine positive Zahl ist, so erhalten wir im Nullpunkt $\varepsilon = \infty$. Berechnen wir aber φ_ϱ nach Gleichung (28a)

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\varrho = \int_0^\varrho dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\eta \cdot r \cdot \frac{A}{r^{\varkappa}} \cdot \sin\vartheta &= 2\pi \cdot 2A \int_0^\varrho dr \cdot r^{1-\varkappa} \\ &= \frac{4\pi A}{2-\varkappa} \cdot \varrho^{2-\varkappa}.\end{aligned}\right\} \tag{29a}$$

Wenn nur $2-\varkappa$ ein positiver Exponent ist, wenn also $\varkappa$ kleiner als 2 ist, verschwindet dieser Ausdruck φ_ϱ mit verschwindendem ϱ, und das Potential φ bleibt in jenem Punkte endlich, obwohl die Dichtigkeit der Elektricität dort unendlich wird.

Nun wollen wir die ersten Differentialquotienten des Potentials φ nach den Variabelen x, y, z betrachten, welche mit negativem Vorzeichen versehen, die Componenten der elektrischen Feldstärke oder Kraft angeben. Da jede dieser Variabelen, z. B. x, nur als Parameter in dem Nenner r des Integrandus vorkommt, so wird die Differenzirung des ursprünglichen Ausdrucks φ in Gleichung (27) unter dem Integralzeichen ausgeführt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \iiint d\tau \cdot \varepsilon \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\iiint d\tau \cdot \varepsilon \frac{x-\xi}{r^3} = +\iiint d\tau \cdot \frac{\varepsilon \cos\vartheta}{r^2}.$$

Setzen wir wieder das Volumelement des Polarcoordinatensystems ein, so hebt sich r^2 fort und es bleibt:

$$\frac{\partial \varphi}{d x} = \iiint d r\, d\vartheta \cdot d\eta \cdot \varepsilon \sin\vartheta \cos\vartheta, \tag{30}$$

also ein endlicher Betrag. Würde man auch hier das Raumintegral theilen in den Beitrag der kleinen Kugel vom Radius ϱ und des äufseren Raumes, so würde ersteres proportional der ersten Potenz von ϱ verschwinden.

Aehnliche Resultate würde man für $\partial \varphi / \partial y$ und $\partial \varphi / \partial z$ finden, wenn auch dabei wegen der Lage der Polaraxe noch Kreisfunctionen des Längenwinkels η mit eingehen würden, welche aber als echte Brüche die Gröfsenordnung der Integrale nicht verändern können. Wir ziehen daher den Schlufs, dafs auch die elektrischen Kräfte im Inneren räumlich geladener Gebiete endlich bleiben und bestimmte Intensität und Richtung besitzen.

Auch hier kann sogar die Dichtigkeit s noch an einzelnen Punkten über alle Grenzen wachsen, ohne dafs die Feldstärke das Gleiche thut. Setzen wir wieder

$$s = \frac{A}{r^{\varkappa}}$$

und integriren über den kleinen Kugelraum um die Unstetigkeitsstelle von s:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int\limits_0^{\varrho} d r \int\limits_0^{2\pi} d \eta \int\limits_0^{\pi} d \vartheta \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \frac{A}{r^{\varkappa}} = 2 \pi A \varrho^{1-\varkappa} \cdot \int\limits_0^{\pi} d \vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (31\text{a})$$

Dieser Ausdruck verschwindet mit ϱ, sobald der Exponent $1 - \varkappa$ positiv ist, sobald also $\varkappa$ kleiner als 1 ist. Dabei kann also die Dichtigkeit immer noch im Nullpunkt unendlich werden wie eine echt gebrochene Potenz von r. Auf einen zweiten Umstand, dafs nämlich das übrig gebliebene $\int\limits_0^{\pi} d \vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$ ist, wollen wir kein besonderes Gewicht legen. Das rührt nur daher, dafs wir den Abfall der Dichtigkeit s nach allen Richtungen radial symmetrisch angesetzt haben. Bei solcher Vertheilung kann freilich im Symmetriecentrum keine Kraft nach irgend einer Seite zu Stande kommen, weil sich diametral gegenüberliegende gleiche Ladungen in ihrer Wirkung auf das Centrum stets aufheben, sie mögen so stark sein, als beliebt.

Gehen wir nun aber zu den zweiten Differentialquotienten von φ über, welche uns wegen der Laplace-Gleichung interessiren, so stofsen wir selbst bei endlicher räumlicher Dichtigkeit auf Hindernisse. Der im Volumelement des Polarcoordinatensystems vorkommende Factor r^2 reicht nicht mehr hin, die im Nenner bei den Differentialquotienten auftretenden Potenzen von r aufzuheben, sondern es bleibt $1/r$ im Integranden zurück. Dieses über die kleine Kugel

integrirt, giebt aber $\int_0^\varrho \frac{dr}{r} = \overline{\log \operatorname{nat} r}\Big|_0^\varrho$, was den unbestimmten Werth $\infty - \infty$ annimmt. Man kann also bei den zweiten Differentialquotienten des Potentials nicht mehr den Schlufs ziehen, dafs der Beitrag der kleinen Kugel zugleich mit deren Radius verschwindet. Dasselbe gilt dann auch von der Summe der zweiten Differentialquotienten, welche mit $\Delta\varphi$ bezeichnet wurde. Zerschneiden wir also das Volumintegral φ in einen Teil φ_ϱ, erstreckt über den Raum der kleinen Kugel, und einen zweiten φ über den äufseren geladenen Raum, so ist sicherlich wie in (27a) gezeigt: $\Delta\varphi' = 0$. Über $\Delta\varphi_\varrho$ aber können wir nichts aussagen, und deshalb auch über $\Delta\varphi$ nicht. Wir werden nachher sehen (was Laplace noch nicht erkannt zu haben scheint), dafs thatsächlich an Stellen mit räumlicher elektrischer Dichtigkeit das $\Delta\varphi$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

In dem Falle, dafs die Dichtigkeitsvertheilung in einem Punkte auf Null heruntergeht, läfst sich indessen zeigen, dafs das Integral über die kleine Kugel mit dieser schwindet.

Setzen wir z. B. $s = A \cdot r^\varkappa$, wo $\varkappa$ eine positive Zahl ist, so wird dadurch eine von Null anwachsende radial gleichmäfsige Vertheilung dargestellt. In dem Integranden, der vorher $\int \frac{dr}{r}$ enthielt, bekommen wir jetzt $\int \frac{dr}{r} r^\varkappa = \int dr\, r^{\varkappa - 1} = \frac{1}{\varkappa} r^\varkappa$, also eine positive Potenz von r, welche bewirkt, dafs der Antheil der kleinen Kugel für $\varrho = 0$ verschwindet. Je kleiner die Zahl $\varkappa$ gewählt wird, um so steiler ist der Anstieg der Dichtigkeit um die Nullstrecke herum und da wir $\varkappa$ als echten Bruch ansetzen dürfen, so ist ein sehr schroffer Uebergang von der Dichtigkeit Null in dem betrachteten Punkte zu endlichen Werthen verträglich damit, dafs im Centrum $\Delta\varphi = 0$ bleibt.

Zu je höheren Differentialquotienten von φ man übergeht, um so höhere Potenzen von r treten im Nenner des Integranden auf. Ueber den Beitrag, den das Integral über den verschwindenden Kugelraum zu einem dieser höheren Differentialquotienten liefert, kann man nichts aussagen; er kann endlich, unendlich und unstetig wechseln.

Fassen wir nochmals die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen: Bei endlicher räumlicher Dichtigkeit der Elektricität haben die in unendlich geringer Entfernung von dem betrachteten Punkt x, y, z gelegenen Ladungen einen verschwindend

kleinen Einfluſs auf den Werth des Potentials φ und seiner ersten Differentialquotienten, welche die Feldstärke messen. Diese Gröſsen bleiben daher im Inneren geladener Bereiche endlich. Es folgt daraus sogar direct, daſs sie sich auch stetig verändern müssen, selbst an Stellen, wo ε unstetig ist, z. B. wenn man mit dem Punkte x, y, z aus leerem Gebiet in geladenes übertritt. Die zweiten Differentialquotienten und namentlich das $\Delta\varphi$ wird aber in seinem Werthe empfindlich beeinfluſst durch die in unendlich kleinem Raum um den betrachteten Punkt herumliegenden Ladungen, also durch den lokalen Werth der Dichtigkeit ε. An Stellen, wo dieser sich unstetig ändert, z. B. an der Grenzfläche zwischen leerem und geladenem Gebiet, werden daher auch Sprünge von $\Delta\varphi$ zu erwarten sein. Mehr läſst sich einstweilen nicht darüber aussagen.

§ 12. Continuirlich verbreitete Ladungen auf Flächen.

Eine zweite Möglichkeit, continuirlich verbreitete elektrische Ladungen sich vorzustellen, besteht darin, daſs man die Elektricität auf vorgeschriebenen Flächen ausgebreitet denkt derart, daſs ein endliches Quantum der Ladung ein endliches Flächenstück bedeckt. Der Quotient aus der Ladung, dividirt durch die bedeckte Fläche, nähere sich für verschwindende Gröſse der letzteren an jeder Stelle der Fläche einem festen endlichen Grenzwerth, welcher die Flächendichtigkeit e der Elektricität genannt wird. Wir wollen auch hier zunächst voraussetzen, daſs die Vertheilung unverrückbar von der Fläche festgehalten werde, sich nicht etwa erst unter Wirkung der elektrischen Kräfte darauf zu einer Gleichgewichtslage zurechtschiebe; dann ist e als eine vorgeschriebene Function des Ortes auf der Fläche zu behandeln, ein einzelnes Flächenelement ds enthält dann das Ladungsquantum $d\mathfrak{e} = e \cdot ds$.

Die Dimension der Flächendichtigkeit im elektrostatischen Maaſssystem findet man, indem man die elektrostatische Dimension der Ladung, Gleichung (2), dividirt durch die Dimension L^2 der Fläche. Es ist mithin

$$e = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]. \tag{32}$$

Ihre Einheit im C.G.S.-System bildet ein über ein Quadratcentimeter verbreitetes Einheitsquantum.

Das Potential einer Flächenbelegung kann man ebenso berechnen wie dasjenige von punktförmigen Ladungen $e\,ds$; an Stelle der Summation tritt hier eine Integration über sämmtliche geladenen

Flächen, r bezeichne den Abstand der einzelnen Flächenelemente ds von dem Punkte x, y, z, in welchem φ gesucht wird. Es ist dann

$$\varphi = \iint \frac{e \cdot ds}{r}. \tag{33}$$

Dieser Ausdruck ist endlich und verläuft sicherlich stetig, so lange der Punkt in endlichem Abstand von der belegten Fläche bleibt. Nähert er sich aber der Fläche bis zu einem verschwindenden Abstand oder rückt er gar in die Fläche selbst, so wächst der Integrand für die nächstbenachbarten Flächenelemente über alle Grenzen. Es bedarf dann einer besonderen Untersuchung, um zu erkennen, ob auch dann φ endlich und stetig bleibt.

Wir denken den Punkt P (siehe die perspectivische Ansicht Figur 2), in welchem φ gesucht werden soll, in sehr geringem Abstande von der geladenen Fläche, fällen von ihm aus die Normale PN und legen um sie als Axe einen Kreiscylindermantel vom Radius ϱ_0. Dieser schneidet aus der Fläche ein rund umgrenztes Stück heraus Dieselbe Construction ist auch denkbar für den Fall, daſs der Punkt P genau in der geladenen Fläche liegt, sich also mit N deckt. Zertheilen wir nun das Integral für φ [Gleichung (33)] ebenso, wie die geladene Fläche, so leuchtet ein, daſs der über die auſserhalb des herausgeschnittenen Stückes liegenden Flächenbelegungen erstreckte Antheil endlich und stetig bleibt, selbst wenn P nach N rückt, weil eben die über alle Grenzen wachsenden Summanden darin fehlen. Wir haben es daher nur mit dem Integral über das im Inneren des Cylinders gelegene Stück der Fläche zu thun. Wir führen in der durch P gelegten Querschnittsebene, welche also zur Tangentialebene wird, wenn P nach N rückt, Polarcoordinaten ein: Radius ϱ und Azimuth ϑ. Das Flächenelement in dieser Ebene wird:

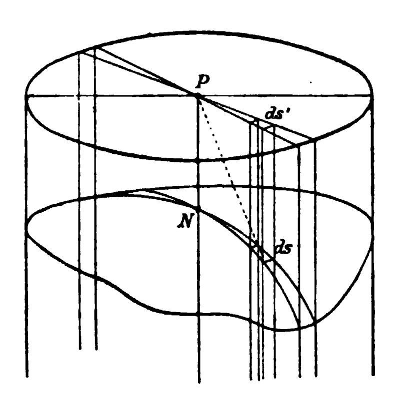


Fig. 2.

$$ds' = \varrho \cdot d\varrho \cdot d\vartheta. \tag{34}$$

Die Flächenelemente ds auf der geladenen, im Allgemeinen krummen Fläche wählen wir so, daſs deren Projectionen auf die Querschnittsebene sich mit den soeben angegebenen ds' decken, vergl. Figur 2.

Ist α der Neigungswinkel eines ds gegen die Grundebene, so ist $ds \cdot \cos\alpha = ds'$, oder

$$ds = \frac{\varrho \cdot d\varrho \cdot d\vartheta}{\cos\alpha}, \tag{34a}$$

mithin der über das herausgeschnittene Flächenstück erstreckte Theil des Integrals

$$\varphi_0 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} d\varrho \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\epsilon}{\cos\alpha} \cdot \tag{35}$$

Nun kann auf keine Weise ϱ gröfser werden als r, der Bruch ϱ/r also nie gröfser als 1; im Allgemeinen ist vielmehr immer $\varrho/r < 1$. In Figur 2 ist ϱ der Abstand des ds' von P, während r durch die punktirte Linie von P nach ds gegeben ist. Rückt aber P nach N und hat die Fläche stetige Krümmung, so nähert sich ϱ/r für kleine Abstände dem Werthe 1 so stark, dafs man es als Factor im Integranden weglassen darf, was wir jetzt auch thun wollen. In allen Fällen wird durch Unterdrückung dieses Factors der Werth von φ_0 höchstens vergröfsert, niemals aber verkleinert, und in dem Falle $P = N$ überhaupt nicht alterirt.

Das Integral φ_0 in (35) erscheint dann als bestimmtes Doppelintegral mit endlichen Grenzen für die Variabelen ϑ und ϱ. Der Integrand ist $\frac{\epsilon}{\cos\alpha}$, also ebenfalls endlich, wenn nicht in dem engbegrenzten Flächenstück bereits Neigungen von einem rechten Winkel gegen die Tangente im Mittelpunkt vorkommen. Das ist aber bei stetig gekrümmten Flächen ausgeschlossen, vielmehr wird dann der $\cos\alpha$ bei hinreichend kleinem ϱ_0 überall nahe gleich 1 sein, so dafs man ihn ebenfalls ohne Fehler weglassen kann. Läfst man endlich den Cylinderradius ϱ_0 kleiner und kleiner werden, so kann man statt der Variabelen ϵ einen festen Mittelwerth $\bar{\epsilon}$ setzen, der jedenfalls endlich bleibt, und man erhält den Grenzwerth:

$$\varphi_0 = 2\pi\varrho_0 \cdot \bar{\epsilon},$$

welcher mit ϱ_0 gegen Null abnimmt. Damit ist bewiesen, dafs φ endlich und stetig bleibt, auch wenn der Punkt durch die Fläche hindurchtritt an einer Stelle, in welcher Elektricität mit endlicher Flächendichtigkeit verbreitet ist. Es wurde eben der Umstand benützt, dafs bei stetig gekrümmten Flächen sowohl ϱ/r wie $\cos\alpha$ sich der 1 nähern, so dafs man beide Factoren weglassen darf. Es sei erwähnt, dafs das Gleiche auch gilt für die (nicht stetig gekrümmte)

Spitze einer Kegelfläche. Bei dieser nähern sich jene beiden Factoren zwar nicht der 1, aber es ist dann $\frac{\varrho}{r} = \cos\alpha$, deſshalb heben sich beide gegeneinander.

Das Integral φ_0 in Gleichung (35) über den Flächenausschnitt verschwindet mit ϱ_0 sogar noch dann, wenn der Integrand in gewisser Weise unendlich wird.

Nehmen wir z. B. folgende Vertheilung an:

$$\frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\epsilon}{\cos\alpha} = \frac{A}{\varrho^{\varkappa}}, \tag{36}$$

welche für positives $\varkappa$ im Centrum unendlich wird, so ist:

$$\varphi_0 = A\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{\varkappa}} = 2\pi A \cdot \varrho_0^{1-\varkappa}, \tag{36a}$$

verschwindet also mit ϱ_0, so lange nur $\varkappa$ ein echter Bruch ist. Wird also die elektrische Flächendichtigkeit ϵ auf einer stetig gekrümmten Fläche oder an der Spitze einer Kegelfläche (wir können auch noch hinzufügen „an einer scharfen Kante") unendlich wie eine echt gebrochene Potenz des reciproken Abstandes $1/\varrho$, so bleibt trotzdem die Potentialfunction an dieser Stelle endlich und stetig.

Bildet man einen ersten Differenzialquotient von φ, z. B. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, so ist zu beachten, daſs x nur in r steckt, und daſs

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\cos(r, x)}{r^2}$$

ist. Das über die Fläche auſserhalb des Cylinders erstreckte Integral hat endliche und stetige Differentialquotienten. Es kommt nur an auf

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} d\varrho \cdot \varrho \frac{\cos(r, x)}{r^2} \cdot \frac{\epsilon}{\cos\alpha}. \tag{37}$$

Für Punkte, welche in der geladenen Fläche selbst liegen, hat dieser Ausdruck keinen bestimmten Sinn mehr, denn wegen einer im Nenner übrig bleibenden ersten Potenz von r, wofür man im Grenzfall und bei stetiger Krümmung auch ϱ setzen darf, erhält man der Gröſsenordnung nach $\overline{\underline{\operatorname{lognat} \varrho}}_0^{\varrho_0}$, das wird $\infty - \infty$. Sobald der

Punkt aber deutlich auf der einen oder auf der anderen Seite der geladenen Fläche liegt, wenn auch noch so nahe, so wird r niemals genau $= 0$, der Ausdruck (37) nimmt dann einen bestimmten endlichen Werth an, welcher aber nicht mit ϱ_0 zugleich gegen Null strebt, wenn wir den Abstand von der Fläche $< \varrho_0$ lassen. Es ist auch direkt zu erkennen, daſs die Beiträge, die (37) zu dem ganzen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ liefert, wenn man von beiden Seiten an die Fläche heranrückt, entgegengesetzt gleich werden müssen, denn während alle übrigen Factoren beidemal die gleichen sind, hat r entgegengesetzte Richtungen, also der $\cos(r, x)$ beidemale entgegengesetzt gleiche Werthe. So bildet sich eine endliche Differenz zwischen den Werthen von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ an zwei Stellen, welche in verschwindendem Abstand von einander zu beiden Seiten der Fläche liegen, d. h. die ersten Differentialquotienten des Potentials werden dort unstetig, bleiben aber endlich. Nur die nach der Richtung einer Tangente an die Fläche genommenen Differentialquotienten müssen stetig bleiben, weil die Function φ selbst in der Fläche eindeutig ist und zu beiden Seiten stetig verläuft. Für diese tangentialen Differentialquotienten wird auch in dem nach Analogie von (37) gebildeten Ausdruck der Winkel zwischen der Richtung r und der Differentiationsrichtung (dort x) ein rechter, sein Cosinus also gleich Null.

An Stellen, wo die Flächendichtigkeit verschwindet wie eine positive Potenz des Abstandes ϱ, selbst wenn der Exponent ein echter Bruch ist, fallen indessen die Sprünge fort.

§ 13. Continuirlich verbreitete Ladungen auf Linien.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch elektrisch geladene Linien betrachten, obwohl man solche in der Theorie der wirklich vorkommenden elektrostatischen Vertheilungen nur selten und nur als idealen Grenzfall zu verwenden hat. Wir werden dabei auf den Begriff der Liniendichtigkeit E geführt. Das Längenelement dl der geladenen Linie enthält das Quantum $de = E \cdot dl$; auf einer endlichen Strecke liegt ein endliches Quantum. Die Dimension ist

$$E = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

Die Einheit der Liniendichtigkeit im elektrostatischen C.G.S.-System trägt auf einen Centimeter eine elektrostatische Einheit (§ 2).

Das Potential geladener Linien ist

$$\varphi = \int \frac{E \cdot d\,l}{r} \tag{38}$$

und verhält sich im leeren Raume ebenso stetig und endlich wie dasjenige von Punkt-, Raum- und Flächenladungen. Suchen wir aber φ für einen Punkt der geladenen Linie selbst, so wird für diese Stelle $r = 0$, der Integrand unendlich. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dafs ein hinreichendes Stück der Linie zu beiden Seiten des gewählten Punktes als gerade Linie gelten darf. Nur über dieses Stück brauchen wir zu integriren. Die Abmessungen der Länge l auf der Linie können wir von dem gewählten Punkte als Nullpunkt aus rechnen, nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ; dann ist auch die Richtung des positiven Zuwachses $d\,l$ und die untere Grenze als negativ, die obere als positiv festgelegt. Der Abstand r ist seinem Betrage nach gleich l, aber er ist nach beiden Seiten positiv zu rechnen. Bezeichnen wir den absoluten Betrag mit $|\,l\,|$ so wird

$$\varphi = \overline{E} \int_{-}^{+} \frac{d\,l}{|l|} = 2\,\overline{E} \int_{0}^{+} \frac{d\,l}{l} = 2\,\overline{E}\, \Big[\operatorname{lognat} l\Big]_{0}^{+}. \tag{38a}$$

Dies wird wegen der Stelle $l = 0$ logarithmisch unendlich. Die Differentialquotienten des Potentials werden bei unendlicher Annäherung an die geladene Linie noch stärker unendlich.

Da wir punktförmige Ladungen zuallererst als einfachste Vorstellung betrachtet haben, kennen wir jetzt alle Möglichkeiten der Vertheilung.

Bei der Discussion über das Verhalten der Potentialfunction und ihrer Differentialquotienten stiefsen wir auf zwei Fälle, in denen wir durch allgemeine Betrachtung der Integrale keinen Schlufs auf die Werthe ziehen konnten. Es waren dies die zweiten Differentialquotienten und mit ihnen das Laplace'sche $\Delta\,\varphi$ im Inneren räumlicher Ladungen, und zweitens die Sprünge der ersten Differentialquotienten an geladenen Flächen.

Diese Lücken sollen im Folgenden ausgefüllt werden. Wir werden zuerst die für die Berechnung bequemsten Umstände auswählen, deren Kenntnifs uns dann auch bei den allgemeinen Fällen nützlich sein wird.

§ 14. Potential einer gleichmäfsig belegten Kreisscheibe in Punkten der Axe.

Um das Potential eines geladenen ebenen Flächenstückes von kreisförmiger Begrenzung zu berechnen, legen wir in das Centrum der Kreisfläche ein ebenes Polarcoordinatensystem: Radiusvektor ϱ, Azimuth ϑ. Der Radius des Randkreises sei R. Senkrecht auf dieser Ebene legen wir durch das Centrum eine Axe, auf der die Abmessungen x nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet werden. Wir suchen das Potential der Scheibenladung hier nur für Punkte, welche auf dieser x-Axe liegen. Der Abstand eines solchen Punktes von einem der Flächenelemente der Kreisscheibe ist bestimmt durch den absoluten Betrag

$$r = \sqrt{x^2 + \varrho^2},$$

während das Flächenelement durch

$$ds = \varrho \cdot d\varrho \cdot d\vartheta$$

gegeben ist. Die Flächendichtigkeit e, welche im Allgemeinen als Function von ϱ und ϑ beschrieben werden könnte, nehmen wir als constant an. Dann ist

$$\varphi = \iint \frac{e\,ds}{r} = e \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\varrho\, d\varrho}{r},$$

Zur Ausführung des inneren Integrales ist es bequemer, r anstatt ϱ als Variabele einzuführen. Da x bei der Integration ein fester Parameter ist, so liefert die Differentiation des Ausdrucks r

$$dr = \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{x^2 + \varrho^2}} = \frac{\varrho\, d\varrho}{r}.$$

Der unteren Grenze $\varrho = 0$ entspricht $r = \sqrt{x^2}$, was den absoluten Betrag der x-Abmessung bedeuten soll. Der oberen Grenze $\varrho = R$ entspricht das ebenfalls absolute $r = \sqrt{x^2 + R^2}$. Die Integration über den Winkel ϑ liefert den Factor 2π. Es wird also

$$\varphi = 2\pi e \left(\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2}\right)$$

Der Verlauf zu beiden Seiten der Scheibe ist ein symmetrischer. An der Platte selbst ist φ stetig und endlich und hat dort den maximalen Werth $2\pi e R$.

Bilden wir nun von φ den Differentialquotienten nach der Coordinate z, so finden wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2\pi e\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right).$$

Der algebraische Zähler z hat auf beiden Seiten der Scheibe entgegengesetzte Vorzeichen, während die absoluten Wurzeln im Nenner beiderseits positiv sind. Auf der Seite der positiven z ist daher $\frac{z}{\sqrt{z^2}} = +1$, auf der Seite der negativen z aber $\frac{z}{\sqrt{z^2}} = -1$. Dies gilt bis dicht heran an die geladene Fläche, also bis zum Verschwinden des Abstandes z. Der erste Summand $\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$ nähert sich bei diesem Grenzübergange dem Werthe $\frac{z}{R}$, verschwindet also mit z. Deshalb sind nach vorstehender Gleichung die Werthe von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ dicht an der Fläche auf der positiven Seite

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{+0} = -2\pi e$$

auf der negativen Seite

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{-0} = +2\pi e.$$

Dieser Differentialquotient erleidet beim Durchgang durch die geladene Fläche einen Sprung, dessen Gröfse wir finden in der Differenz

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{-0} = -4\pi e.$$

Es ist bemerkenswerth, dafs die Gröfse des Sprunges nur von der Flächendichtigkeit e abhängt, nicht aber von dem Radius der Scheibe.

§ 15. Potential einer gleichmäfsig belegten Kugelfläche.

Die constante Flächendichtigkeit sei e, der Radius der Kugelfläche sei R. Wir legen ein räumliches Polarcoordinatensystem in den Mittelpunkt der Kugel. Die Polaraxe gehe von dort aus nach dem Punkte hin, in welchem wir das Potential bestimmen wollen; dessen Abstand vom Kugelcentrum sei p. Für Punkte im inneren

Kugelraum ist $p < R$, für äufsere Punkte ist $p > R$. Den variabelen Polwinkel nennen wir ϑ, den variabelen Längenwinkel η. Das Oberflächenelement der Kugel ist dann:

$$ds = R^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\eta. \tag{39}$$

Der Abstand r desselben von dem ausgewählten Punkt wird bestimmt durch die bekannte trigonometrische Formel

$$r^2 = R^2 + p^2 - 2Rp\cos\vartheta. \tag{39a}$$

Das Potential $\varphi = \int\int \frac{e\,ds}{r}$ wird also nun

$$\varphi = R^2 e \int_0^{2\pi} d\eta \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{r}. \tag{39b}$$

Die erste Integration nach dem Längenwinkel läfst sich ohne weiteres ausführen und liefert den Factor 2π. Für die zweite Integration ist es bequemer, die Formel (39a) nicht zur Einführung der Poldistanz ϑ an Stelle der Variabelen r zu benützen, sondern umgekehrt mit ihrer Hülfe die in ϑ ausgedrückten Gröfsen durch solche in r zu ersetzen. Dies erreicht man leicht, indem man die Gleichung (39a) bei constant gehaltenem R und p differenzirt:

$$r\,dr = Rp \sin\vartheta d\vartheta.$$

Hieraus läfst sich der Zähler unter dem Integral (39b) folgendermaafsen in r angeben:

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{r\,dr}{Rp}.$$

Es hebt sich dann noch r in Zähler und Nenner. Der unteren Grenze $\vartheta = 0$ entspreche r_0, d. i. der Abstand unseres Punktes von dem ihm zugekehrten Pol der Kugel, der oberen Grenze $\vartheta = \pi$ entspreche r_π (abgewendeter Pol der Kugel). Es ist hiernach

$$\varphi = 2\pi \frac{Re}{p} \int_{r_0}^{r_\pi} dr = \frac{2\pi Re}{p}(r_\pi - r_0). \tag{39c}$$

Die Grenzen r_0 und r_π sind die absoluten Beträge der Abstände des Punktes von den beiden Kugelpolen, man mufs daher

zwischen äußeren und inneren Punkten untrscheiden. Für äußere Punkte ist

$$r_\pi = p + R, \quad r_0 = p - R, \quad r_\pi - r_0 = 2R$$

also

$$\varphi_a = \frac{4\pi R^2 e}{p}. \tag{40a}$$

Für innere Punkte ist

$$r_\pi = R + p, \quad r_0 = R - p, \quad r_\pi - r_0 = 2p \tag{40i}$$

also

$$\varphi_i = 4\pi R e.$$

In diesen beiden Formeln liest man folgende Regeln: Der Zähler von φ_a enthält die gesammte Ladung der Kugeloberfläche

$$\mathfrak{e} = 4\pi R^2 e,$$

mithin ist $\varphi_a = \frac{\mathfrak{e}}{p}$, also ebenso groß, als wenn statt der Kugelbelegung die gesammte Ladung in deren Mittelpunkt concentrirt vorhanden wäre. Deßhalb ist auch das Feld, welches die gleichmäßig beladene Kugel im äußeren Raume erzeugt, Richtung und Intensität der elektrostatischen Kraft gleich den entsprechenden Werthen der gedachten Punktladung im Centrum.

Dieser uns bereits genau bekannte stetige Verlauf der Function reicht bis an die Kugel heran. An ihrer Oberfläche ist $p = R$ und deßhalb

$$\varphi_a = 4\pi R e, \quad \text{für } p = R.$$

Ebenso groß ist aber das dort angrenzende φ_i, wie man aus Gleichung (40i) sieht. Der Werth des Potentials verläuft also beim Durchgang durch die geladene Kugelfläche stetig. Während es aber außen reciprok dem Centralabstand p sich abflacht, hat es im Inneren der Kugel überall denselben constanten Werth $4\pi R e$.

Betrachten wir nun die ersten Differentialquotienten. Im äußeren Raume giebt

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial p} = -\frac{4\pi R^2 e}{p^2} \tag{41a}$$

das steilste Gefälle in radialer Richtung an, und damit zugleich die Intensität der resultirenden elektrischen Kraft. Senkrecht dazu, also in jeder zu den concentrischen Kugelflächen tangentialen Richtung ist das Gefälle gleich Null. Im inneren Kugelraume ist

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = 0; \tag{41i}$$

überhaupt ist dort der Differentialquotient in jeder beliebigen Richtung gleich Null, es herrschen keine elektrischen Kräfte im Hohlraum der Kugelfläche. Beide Formeln (41 a und i) gelten für Punkte in der geladenen Kugelfläche selbst. Während aber für die Innenseite dort noch $\partial \varphi_i / \partial p = 0$ gilt, nähert sich für $p = R$ der Ausdruck für die Aufsenseite dem Werth $\partial \varphi_a / \partial p = -4\pi e$. Der Differentialquotient des Potentials in radialer Richtung ist also an der geladenen Fläche unstetig. Geht man von innen nach aufsen, so springt er von 0 auf $-4\pi e$; es ist

$$\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial p}\right)_{p=R} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p}\right)_{p=R} = -4\pi e. \tag{42}$$

Die Sprunggröfse $-4\pi e$ wird allein bestimmt durch die Flächendichtigkeit, ist aber in diesem Beispiele unabhängig vom Kugelradius.

Das aus den zweiten Differentialquotienten gebildete $\Delta \varphi$ ist sowohl im inneren wie im äufseren Raume gleich Null, innen, weil φ_i constant ist, aufsen, weil φ_a aussieht, wie das Potential einer Punktladung. In der Fläche selbst aber verliert $\Delta \varphi$ seinen Sinn, denn wo bereits die ersten Differentialquotienten unstetig sind, kann man die zweiten nicht bilden.

§ 16. Gleichmäfsig vertheilte Ladung im Raume zwischen zwei concentrischen Kugelflächen und in einer Vollkugel.

Die constante räumliche Dichtigkeit der Elektricität in der Kugelschicht sei ε. Der Radius der inneren Begrenzungsfläche sei R_1, der der äufseren R_2. Wir legen in das gemeinsame Centrum wieder ein Polarcoordinatensystem, dessen Polaraxe durch den Punkt geht, in welchem wir das Potential bestimmen wollen. Dieser liege im Abstand p. Der variabele Radiusvector ist ϱ, der Polwinkel ϑ, der Längenwinkel η. Das Volumelement in diesem Coordinatensystem ist

$$d\tau = \varrho^2 \sin\vartheta \cdot d\varrho \cdot d\vartheta \cdot d\eta, \tag{43}$$

dessen Abstand r von dem ausgewählten Punkt ist gegeben durch

$$r^2 = \varrho^2 + p^2 - 2\varrho p \cos\vartheta. \tag{43a}$$

Das Potential der betrachteten Vertheilung ist

$$\varphi = \iiint \frac{\varepsilon\, d\tau}{r} = \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} d\eta \int\limits_{R_1}^{R_2} d\varrho \int\limits_0^{\pi} d\vartheta \frac{\varrho^2 \sin\vartheta}{r} . \tag{43b}$$

Die Integration nach dem Längenwinkel liefert nur den Factor 2π. Im innersten Integral führen wir r statt ϑ als Variabele ein. Dabei ist zu beachten, daſs ϱ im innersten Integral fester Parameter ist. Es wird dort nur über eine unendlich dünne Lage in der Schicht integrirt. Deſshalb liefert die Differentiation von (43 a), wie im vorigen Paragraphen,

$$r\,dr = \varrho p \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta.$$

Der Integrand ist

$$d\vartheta \cdot \frac{\varrho^2 \sin\vartheta}{r} = \frac{\varrho}{p}\,dr.$$

Den Grenzen 0 und π des Polwinkels entsprechen die absoluten Werthe r_0 und r_π der Abstände unseres Punktes von dem ihm nächsten und fernsten Pol der Kugelfläche vom Radius ϱ.

Nunmehr ist:

$$\varphi = 2\pi\varepsilon \int\limits_{R_1}^{R_2} d\varrho \int\limits_{r_0}^{r\pi} dr\,\frac{\varrho}{p} = \frac{2\pi\varepsilon}{p} \int\limits_{R_1}^{R_2} d\varrho\,\varrho\,(r_\pi - r_0). \tag{43c}$$

Die Differenz der absoluten Strecken $(r_\pi - r_0)$ nimmt ganz wie im vorigen Paragraphen verschiedene Formen an, je nachdem p gröſser oder kleiner als ϱ ist. Es ist

$$r_\pi - r_0 = 2\varrho \text{ für } p > \varrho,$$
$$r_\pi - r_0 = 2p \text{ für } p < \varrho.$$

Danach ist auch das Resultat der letzten Integration je nach der Länge p ein verschiedenes.

Liegt unser Punkt auſserhalb der ganzen Kugelschicht, so ist $p > R_2$ also auch gröſser als sämmtliche ϱ, über welche von R_1 bis R_2 integrirt werden soll. Man hat dann $r_\pi - r_0 = 2\varrho$ zu setzen und findet für den äuſseren Raum

$$\varphi_a = \frac{4\pi\varepsilon}{p} \int\limits_{R_1}^{R_2} d\varrho \cdot \varrho^2 = \frac{4\pi\varepsilon}{3p}(R_2^3 - R_1^3). \tag{44a}$$

Das Volumen der geladenen Schicht ist als Differenz der beiden Kugelvolumina gleich $\frac{4\pi}{3} R_2^3 - \frac{4\pi}{3} R_1^3$ und kommt in φ_a als Factor vor, welches zusammen mit dem anderen Factor ε die Gesammtladung der Schicht

$$e = \frac{4\pi\varepsilon}{3}(R_2^3 - R_1^3)$$

ergiebt. Es ist demnach

$$\varphi_a = \frac{e}{p} .$$

Das Potential im äufseren Raume — und damit auch das elektrische Feld daselbst — ist so gestaltet, als wäre die gesammte Ladung im Centrum zu einer endlichen Punktladung vereinigt. Dies gilt bis an die Kugelfläche R_2.

Liegt unser Punkt in der leeren Höhlung, so ist $p < R_1$, also auch kleiner als sämmtliche im Integral vorkommenden ϱ. Man hat dann $r_\pi - r_0 = 2p$ zu setzen und findet für den inneren Hohlraum, nachdem man p in Zähler und Nenner gehoben hat:

$$\varphi_i = 4\pi\varepsilon \int\limits_{R_1}^{R_2} d\varrho \cdot \varrho = 2\pi\varepsilon (R_2^2 - R_1^2). \tag{44i}$$

Dieser Ausdruck ist in der ganzen Höhlung constant, das Potential hat dort kein Gefälle, es existirt dort keine elektrische Feldintensität. Dies gilt bis an die Kugelfläche R_1.

Drittens kann unser Punkt auch in der geladenen Schicht selbst liegen. Dafs φ dort noch endlich bleibt, haben wir schon in § 11 hinter Gleichung (28 b) festgestellt. Es werden dann aber in unserem Integral (43 c) sowohl $\varrho < p$ wie auch $\varrho > p$ vorkommen, so dafs wir für $(r_\pi - r_0)$ nicht überall denselben Ausdruck setzen dürfen. Wir spalten defshalb das Integral in einen Theil von R_1 bis p und einen von p bis R_2. Im ersten ist für die Abstandsdifferenz $2p$, im zweiten 2ϱ zu setzen. Wir haben dadurch unsere Schicht in zwei Schichten zerschnitten, für deren erstere unser Punkt an der Grenze des Aufsenraumes, für deren zweite er an der Grenze der Höhlung liegt. Das Potential in diesem mittleren Raumgebiet nennen wir φ_m und finden:

$$\varphi_m = \frac{2\pi\varepsilon}{p} \int\limits_{R_1}^{p} d\varrho \cdot \varrho \cdot 2\varrho + \frac{2\pi\varepsilon}{p} \int\limits_{p}^{R_2} d\varrho \cdot \varrho \cdot 2p$$

oder beide Theile nach dem Muster von φ_a und φ_i ausgeführt:

$$\varphi_m = \frac{4\pi\varepsilon}{3p}(p^3 - R_1^3) + 2\pi\varepsilon(R_2^2 - p^2) .$$

Dies kann man noch durch eine leichte Umformung in die Form bringen:

$$\varphi_m = 2\pi\varepsilon R_2^2 - \frac{2\pi\varepsilon}{3} p^2 - \frac{4\pi\varepsilon}{3} \frac{R_1^3}{p} . \tag{44m}$$

Das Potential ist also in diesem mittleren Gebiet eine stetige algebraische Function des Centralabstandes p von eigenthümlicher Form: Es besteht aus einer dem Quadrat des äufseren Grenzradius proportionalen Constante, von welcher erstens ein in p quadratisches Glied, zweitens ein zu p reciprokes Glied abgezogen wird. Das letztere, proportional dem Cubus des inneren Grenzradius, strebt beim Schwinden der Höhlung, d. h. beim Uebergang zur Vollkugel, gegen Null, und ist nichts anderes als das Potential der Füllung des Hohlraumes, welches abgezogen werden mufs, weil wir den Hohlraum als leer von Ladung angenommen haben. Der Ausdruck φ_m gilt bis an beide Grenzen R_1 und R_2.

Zunächst sieht man leicht, daß φ an beiden Grenzflächen stetige Uebergänge zeigt. An der äufseren Grenzfläche hat man in φ_a und φ_m einzusetzen $p = R_2$. Das giebt:

$$\varphi_a = \frac{4\pi\varepsilon}{3}\left(R_2^{\,2} - \frac{R_1^{\,3}}{R_2}\right)$$

$$\varphi_m = 2\pi\varepsilon R_2^{\,2} - \frac{2\pi\varepsilon}{3} R_2^{\,2} - \frac{4\pi\varepsilon}{3}\frac{R_1^{\,3}}{R_2}$$

also identische Werthe.

An der inneren Grenzfläche hat man in φ_i und φ_m einzusetzen $p = R_1$. Das giebt:

$$\varphi_i = 2\pi\varepsilon(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})$$

$$\varphi_m = 2\pi\varepsilon R_2^{\,2} - \frac{2\pi\varepsilon}{3} R_1^{\,2} - \frac{4\pi\varepsilon}{3} R_1^{\,2}$$

also gleichfalls identische Werthe.

Von den ersten Differentialquotienten sind die tangential zu den concentrischen Kugeln genommenen im ganzen Raume gleich Null. Das Hauptgefälle, also die resultirende Kraft, hat überall radiale Richtung. Man findet dafür in den drei Raumgebieten folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial p} = -\frac{4\pi\varepsilon}{3}\frac{R_2^{\,3} - R_1^{\,3}}{p^2} = -\frac{e}{p^2} \tag{45a}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial p} = -\frac{4\pi\varepsilon}{3} p + \frac{4\pi\varepsilon}{3}\frac{R_1^{\,3}}{p^2} \tag{45m}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p} = 0\,. \tag{45i}$$

Auch diese bleiben an den Grenzen des geladenen Raumes stetig; setzt man nämlich im ersten und zweiten Ausdruck $p = R_2$, so erhält man beide Male den Werth $-\frac{4\pi\varepsilon}{3}\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2}$, und setzt man im zweiten Ausdruck $p = R_1$, so erhält man Null, wie im dritten Ausdruck.

Die zweiten Differentialquotienten nach p sind

$$\frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial p^2} = \frac{8\pi\varepsilon}{3}\frac{R_2^3 - R_1^3}{p^3} \tag{46a}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial p^2} = -\frac{4\pi\varepsilon}{3} - \frac{8\pi\varepsilon}{3}\frac{R_1^3}{p^3} \tag{46m}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial p^2} = 0\,. \tag{46i}$$

Sie verlaufen beim Durchgang durch beide Grenzflächen unstetig. Um die Werthe von $\Delta\varphi$ in den drei Abtheilungen des Raumes zu finden, mufs man zunächst den Ausdruck aufsuchen, den die Operation $\Delta\varphi$ für eine reine Function des Abstandes p von einem festen Centrum annimmt. Liegt dieses an der Stelle x_0, y_0, z_0, während x, y, z den Ort des betrachteten Punktes angibt, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
&p^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\
&\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{x - x_0}{p}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y - y_0}{p}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{z - z_0}{p} \\
&\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = +\frac{1}{p} - \frac{(x - x_0)^2}{p^3}, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{p} - \frac{(y - y_0)^2}{p^3}, \\
&\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{p} - \frac{(z - z_0)^2}{p^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Anderseits ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dp^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dp}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

nebst analogen Ausdrücken für die y- und die z-Coordinate. Setzt man in diesen Gleichungen die Ausdrücke aus den Gleichungen (47)

ein und bildet die Summe des zweiten Differentialquotienten, so kommt heraus

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d p^2}\left(\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{p^2}\right)$$

$$+\frac{d \varphi}{d p}\left(\frac{3}{p}-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{p^3}\right)$$

oder

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{d p^2}+\frac{2}{p} \frac{d \varphi}{d p}. \tag{48}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (46) und (45) erhält man also:

$$\Delta \varphi_a = \frac{8 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_2^3-R_1^3}{p^3}-\frac{2}{p} \cdot \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_2^3-R_1^3}{p^2}=0 \tag{48a}$$

$$\Delta \varphi_m = -\frac{4 \pi \varepsilon}{3}-\frac{8 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_1^3}{p^3}-\frac{2}{p} \cdot \frac{4 \pi \varepsilon}{3} p+\frac{2}{p} \cdot \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \frac{R_1^3}{p^2}=-4 \pi \varepsilon \tag{48m}$$

$$\Delta \varphi_i = 0. \tag{48i}$$

Also in den von Ladung freien Theilen des Raumes, sowohl im äufseren wie in der Höhlung, ist $\Delta \varphi = 0$; das Potential folgt dort überall der LAPLACE'schen Differentialgleichung. Das wufsten wir schon. Aber in der gleichförmig mit räumlicher Ladung erfüllten Schicht ist $\Delta \varphi = -4 \pi \varepsilon$. Dies ist ein neues wichtiges Resultat, aus welchem hervorgeht, dafs der Werth des $\Delta \varphi$ allein durch die räumliche Dichtigkeit bestimmt wird, aber unabhängig von der Lage des ausgewählten Punktes und von den Radien der begrenzenden Kugelflächen ist. Beim Uebergang aus leerem in geladenes Gebiet und umgekehrt verläuft also $\Delta \varphi$ unstetig.

Die Betrachtungen über die Kugelschicht gelten unverändert auch für eine Vollkugel, welche gleichförmig mit räumlicher Ladung erfüllt ist. Man braucht nur den Radius der inneren Höhlung $R_1 = 0$ zu setzen, was nirgends zu mathematischen Unzuträglichkeiten führt, die vorstehenden Formeln aber vereinfacht. Das Gebiet, in welchem φ_i gilt, verschwindet dann, man hat nur φ_a im äufseren Raume und φ_m im Inneren der Kugel, deren Radius wir nun $R_2 = R$ nennen können. Aus (44a und m) folgt:

$$\varphi_a = \frac{4 \pi \varepsilon}{3} \frac{R^3}{p} = \frac{e}{p} \tag{49a}$$

$$\varphi_m = 2 \pi \varepsilon R^2 - \frac{2 \pi \varepsilon}{3} p^2 \tag{49m}$$

Aus (45a und m) folgt:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial p} = -\frac{4\pi s}{3}\frac{R^3}{p^2} = -\frac{e}{p^2} \tag{50a}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial p} = -\frac{4\pi s}{3} p \tag{50m}$$

Aus (48a und m) endlich folgt:

$$\Delta \varphi_a = 0 \tag{51a}$$

$$\Delta \varphi_m = -4\pi s. \tag{51m}$$

§ 17. $\Delta \varphi$ bei beliebiger Vertheilung der räumlichen Dichtigkeit der Elektricität. Differentialgleichung von Poisson.

Wir denken uns jetzt eine beliebig vorgeschriebene räumliche Vertheilung der Elektricität, so dafs s als bekannte Function der Raumcoordinaten auftritt. Diese Function kann an gewissen Grenzflächen Unstetigkeiten aufweisen, soll aber sonst einen stetigen und endlichen Verlauf haben. Wir stellen die Aufgabe, den Werth von $\Delta \varphi$ zu bestimmen in einem Punkte, in welchem die elektrische Dichtigkeit den von Null verschiedenen Werth s_0 besitzt. Wir legen eine Kugel um diesen Punkt als Centrum. Dadurch zerschneiden wir die Ladungen in zwei Gebiete, eines aufserhalb dieser Kugelfläche, ein zweites innerhalb. Die Ladung dieses zweiten Gebietes theilen wir abermals in zwei Theile; diesmal nicht durch eine räumliche Grenzfläche, sondern dadurch, dafs wir s als Superposition von zwei Vertheilungen in den Kugelraum ansehen, deren erste überall den festen Werth s_0 zeigt, welcher im Kugelcentrum herrscht, während der zweite von der Form $(s - s_0)$ im Centrum gleich Null ist, und in den excentrischen Gegenden des Kugelraumes den Veränderungen der Variabelen s Rechnung trägt.

Entsprechend dieser Dreitheilung des Ladungsvorrathes spaltet sich dann auch das Raumintegral $\iiint \frac{s\,d\tau}{r}$, welches das Potential im Mittelpunkt der Kugel darstellt, wenn r den Abstand von dort bezeichnet, während $d\tau$ das Volumelement des geladenen Raumes ist. Die entstehenden drei Theile des Gesammtpotentials φ wollen wir folgendermaafsen bezeichnen. Das Potential der aufserhalb der Kugelfläche befindlichen Massen, in welchen also der Kugelraum als leer gilt, nennen wir hier φ_a. Es ist dann im Inneren der Kugel

sicherlich schon nach Gleichung (27a) $\Delta \varphi_a = 0$. Den zweiten Theil, welcher von der gleichförmig mit der Dichtigkeit ε_0 erfüllten Kugel herrührt, nennen wir φ_0. Für dieses gilt nach dem vorigen Paragraphen: $\Delta \varphi_0 = -4\pi\varepsilon_0$. Der Rest φ_1, welcher der Vertheilung $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ entspringt, befriedigt im Kugelcentrum ebenfalls die Bedingung $\Delta \varphi_1 = 0$, denn $\varepsilon - \varepsilon_0$ verschwindet bei stetigem Verlauf von ε in der Mitte der Kugel. Wir konnten sogar gegen Ende des § 11 nachweisen, daſs $\Delta \varphi = 0$ noch gilt, wenn der Anstieg der Dichtigkeit in der Umgebung einer Nullstelle ein recht steiler ist, das heiſst hier, wenn die Dichtigkeit ε einem unstetigen Verlauf beliebig nahe kommt.

Nun folgt direct aus

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_0 + \varphi_1$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_a + \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_1$$

und

$$\Delta \varphi_a = 0, \quad \Delta \varphi_a = -4\pi\varepsilon_0, \quad \Delta \varphi_1 = 0$$

das Resultat:

$$\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon_0 . \tag{52}$$

Der Werth von $\Delta \varphi$ ist an jeder Stelle des Raumes gleich der, mit -4π multiplicirten, räumlichen Dichtigkeit der Elektricität, welche daselbst herrscht, dagegen unabhängig von den an anderen Stellen liegenden Ladungen. Da nun für jeden Punkt im Raume das Gleiche gilt, so können wir jetzt den Index 0 weglassen, und schreiben:

$$\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon \tag{52a}$$

Dies ist die von Poisson aufgestellte Differentialgleichung für das Potential in geladenen Räumen. Die im leeren Raume gültige Laplace'sche Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ erscheint als einfachster Sonderfall von dieser. Differentialgleichungen von diesem Typus, die also aussagen, daſs eine im Raume definirte Function gleich dem Δ einer anderen Function sein soll, kommen auch in anderen Theilen der Physik vor, in denen die Gröſse ε nicht eigentlich die Dichtigkeit einer Substanz bedeutet, mitunter sogar eine gerichtete Gröſse vorstellt, was sich dann auf die zugehörige Function φ überträgt.

§ 17a. Der Sprung der ersten Differentialquotienten von φ an einer beliebigen elektrisch beladenen Fläche.

Wir denken uns jetzt eine beliebig gestaltete Fläche im Raume in beliebiger Weise mit Elektricität belegt. Die Fläche kann stellen-

weise scharfe Kanten und Ecken besitzen, soll aber sonst höchstens endliche Krümmung besitzen; auch die Flächendichtigkeit e kann an einzelnen Grenzlinien unstetig wechseln, soll aber sonst einen stetigen Verlauf auf der Fläche haben.

In irgend einem Punkte der Fläche, wo die elektrische Dichtigkeit den Werth e_0 habe, errichten wir nach beiden Seiten die Normale, und lassen einen Beobachtungspunkt auf dieser durch die Fläche hindurchgehen. Die Abmessungen auf dieser Geraden nennen wir n, sie sind auf der einen Seite negativ, auf der anderen positiv. Den Differentialquotienten von φ nach der Richtung der wachsenden n bezeichnen wir mit $\partial\varphi/\partial n$; er ist also an der negativen Seite in der Richtung nach der Fläche hin, auf der positiven Seite in der Richtung von der Fläche weg zu bilden. Um die Unstetigkeit und die Sprunggröfse dieses Differentialquotienten beim Durchgang durch die Fläche zu finden, machen wir uns folgende Vorstellung: Wir legen in den Fufspunkt der Normale die Tangentialebene an die Fläche, schlagen in ihr um den Fufspunkt einen Kreis mit dem hinreichend kleinen Radius ϱ_0 und schneiden mittelst eines durch diesen hindurchgelegten geraden Cylindermantels aus der geladenen Fläche ein rundes Stück heraus, welches den Fufspunkt der Normale enthält. Es ist das dieselbe Construction, welche in Figur 2 (S. 40) veranschaulicht ist, wenn man dort den Punkt P nach N verlegt denkt. Die in der Tangentialebene gelegene Kreisfläche ist ohne Ladung, wir können uns aber statt dessen auch vorstellen, dafs sie mit zwei entgegengesetzt gleichen Flächendichtigkeiten belegt ist, welche sich vollkommen neutralisiren. Diese beiden Belegungen sollen auf der ganzen Kreisfläche die constanten Dichtigkeiten $+e_0$ und $-e_0$ haben. Wir haben es also jetzt mit folgenden Belegungen zu thun.

1. Die Belegung e der gegebenen Fläche, soweit sie aufserhalb des erzeugten runden Ausschnitts liegt.

2. Die Belegung e der gegebenen Fläche auf dem runden Ausschnitt, welche bei stetigem Verlauf im Fufspunkt der Normale den Werth e_0 erreicht.

3. Die Belegung $-e_0$ der tangentialen Kreisfläche.

4. Die Belegung $+e_0$ der tangentialen Kreisfläche.

Entsprechend dieser Viertheilung der elektrischen Ladungen zerfällt auch deren Potential nebst Differentialquotienten in vier Summanden, die wir durch dieselben Nummern im Index mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 bezeichnen wollen. Ursprünglich gehören φ_1 und φ_2 zusammen; denn $\varphi_1 + \varphi_2$ bildet das Potential der ganzen vorgelegten Elek-

tricitätsvertheilung, und auch φ_3 und φ_4 gehören ursprünglich zusammen, denn $\varphi_3 + \varphi_4 = 0$ ist der thatsächlich nicht existirende Beitrag, den die ungeladene Tangentialebene zum Gesammtpotential liefert. Die Spaltung des Potentials φ in die Summanden φ_1 und φ_2 nützte uns bereits in § 12 zum Beweise, dafs das Potential selbst an der geladenen Fläche stetig bleibt, während dessen erste Differentialquotienten dort im allgemeinen unstetig sind.

Die Hinzufügung der beiden sich gegenseitig zerstörenden Glieder φ_3 und φ_4 geschieht hier, weil wir φ_2 und φ_3 mit Nutzen zusammenfassen können:

$$\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3) + \varphi_4$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial (\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial n}. \tag{53}$$

Der erste Summand $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ erfährt keinen Sprung beim Durchgang durch die Fläche, denn für ihn ist sowohl der Ausschnitt der Fläche, wie auch die Kreisscheibe leer, es ist dort ein Loch geschaffen worden. Auch der zweite Summand $\frac{\partial (\varphi_2 + \varphi_3)}{\partial n}$ erleidet keinen Sprung. Dies kann man vollständig einsehen mit den in § 12 gegebenen Mitteln. φ_2 ist das Potential einer thatsächlich über ein Stück der krummen Fläche verbreiteten Ladung, dieses wurde aber bereits dort in Gleichung (35) als Flächenintegral über die zugehörige Kreisscheibe dargestellt. Der dort mit φ_0 bezeichnete Ausdruck ist unser jetziges φ_2. Man braucht nur noch eine geringe Umformung mit jener Gleichung (35) vorzunehmen. Es bezeichnete r den Abstand des einzelnen Flächenelementes ds von dem auf der z-Axe gelegenen Punkt, in welchem φ gesucht wird. Nennen wir nun r' den Abstand des entsprechenden in der Tangentialebene gelegenen Flächenelementes ds' von demselben Punkt, so können wir im Integranden $\frac{r'}{r'}$ zusetzen und folgendermaafsen zusammenfassen:

$$\varphi_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} d\varrho \frac{\varrho}{r'} \cdot \left(\frac{r'}{r} \cdot \frac{e}{\cos\alpha}\right). \tag{54}$$

In dieser Form deckt sich der Ausdruck mit dem Potential einer Belegung der tangentialen Kreisfläche; die Flächendichtigkeit auf ihr wäre

$$e' = \frac{r'}{r} \cdot \frac{e}{\cos\alpha}. \tag{54a}$$

Je näher ein Flächenelement am Mittelpunkt der Kreisfläche liegt, um so mehr nähern sich $\frac{r'}{r}$ und $\cos\alpha$ dem Werthe 1, also e' demjenigen Werthe, welchen e im Mittelpunkt besitzt; diesen hatten wir e_0 genannt.

Das Potential φ_3 können wir sofort angeben:

$$\varphi_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} d\varrho \cdot \frac{\varrho}{r'} \cdot (-e_0).$$

Beide lassen sich nun direct zusammenfassen, da sie über dieselbe Kreisfläche summirt sind:

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} d\varrho \cdot \frac{\varrho}{r'} \left(\frac{r'}{r}\,\frac{e}{\cos\alpha} - e_0\right). \tag{55}$$

Dies ist das Potential einer Belegung der Kreisfläche mit folgender Dichtigkeitsvertheilung:

$$e'' = \frac{r'}{r}\,\frac{e}{\cos\alpha} - e_0. \tag{55a}$$

Diese wird in der Mitte der Fläche absolut gleich Null und steigt bei stetigem e und endlicher Krümmung der Fläche ringsum ganz allmählich an wie eine Gröfse, die proportional ϱ ist. Für solche Vertheilungen wurde nun am Schlusse von § 12 nachgewiesen, dafs der Sprung der ersten Differentialquotienten ausbleibt, wenn man an einer Stelle hindurchgeht, wo die Dichtigkeit gleich Null ist. Ja es liefs sich zeigen, dafs zum Wegfall der Sprünge nicht einmal nöthig ist, dafs die Dichtigkeit wie ϱ auf Null herabgeht, sondern dafs ein Verschwinden proportional einer kleineren, echt gebrochenen Potenz $\varrho^{\varkappa}$ $(\varkappa > 0)$ dafür genügt. Das würde in unserem Falle bedeuten, dafs die vorgeschriebene Vertheilung e einer Unstetigkeit oder dafs die Flächenkrümmung einer scharfen Kante oder Ecke nahe kommen darf, und dafs trotzdem noch gilt:

$$\overline{\underline{\frac{\partial(\varphi_2+\varphi_3)}{\partial n}}}\Bigg|_{-}^{+} = 0.$$

Die vierte Summand in (53) endlich erfährt einen Sprung, dessen Werth wir in § 14 bereits ausgerechnet haben, denn es handelt

sich hier nur noch um die gleichförmige positive Belegung $+ e_0$ der ebenen Kreisfläche. Es ist also:

$$\frac{\overset{+}{\overline{\partial \varphi_4}}}{\underset{-}{\underline{\partial n}}} = - 4 \pi e_0$$

und mithin gilt für das Gesammtpotential φ der beliebigen Flächenbeladung der Satz

$$\frac{\overset{+}{\overline{\partial \varphi}}}{\underset{-}{\underline{\partial n}}} = - 4 \pi e_0 .$$

Dabei war e_0 der Werth an dem Punkte, in welchem wir die Fläche durchquert haben. Da dies nun ein jeder Punkt sein kann, so hat der Index 0 jetzt keine Bedeutung mehr. Es ist überall an der geladenen Fläche (in ausführlicher Schreibart)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_- = - 4 \pi e . \tag{56}$$

Bei vielen Autoren findet man die Normalenrichtung auf beiden Seiten von der Fläche weg gekehrt. Das stimmt mit der Richtung unseres wachsenden n nur auf der positiven Seite, auf der negativen Seite ist sie umgekehrt. Dadurch dreht sich auch das Vorzeichen um, und die Formel wird:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = - 4 \pi e . \tag{56a}$$

Der Sinn beider Schreibweisen ist der gleiche.

Man kann sich den Verlauf des Potentials beim Durchgang durch eine geladene Fläche mittels eines Diagramms recht anschaulich machen, indem man den auf der Normalen zur Fläche verlaufenden Weg des Beobachtungspunktes als Abscisse (n positiv nach rechts) und die an den Orten geltenden Werthe des Potentials als Ordinaten (φ positiv nach oben) aufträgt. Die so entstehende Curve wird im Allgemeinen einen stetig gekrümmten Verlauf zeigen, dessen Gestalt von der Vertheilung aller vorhandenen Ladungen im ganzen Raume abhängt und über die sich nichts Generelles aussagen läſst. Bei der Abscisse $n = 0$ aber, wo die Normale die geladene Fläche durchsticht, besitzt die graphische Potentialcurve einen ganz charakteristischen Knick, der von nichts anderem abhängt, als vom Werthe der Flächendichtigkeit e in dem durchstochenen

Punkte der Fläche. Nehmen wir nämlich der Kürze wegen an, der Ordinatenmaafsstab des Diagramms betrage 1 cm für eine elektrostatische (C.G.S.)-Einheit des Potentials, so wird die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Curve direct durch den Differentialquotient $\frac{d\varphi}{dn}$ angegeben, und dafs der Sprung dieses Werthes gleich $-4\pi\varepsilon$ sein mufs, das bestimmt den Knick. Bei einer positiven Belegung kann das Diagramm beispielsweise die Formen, Figur 3,

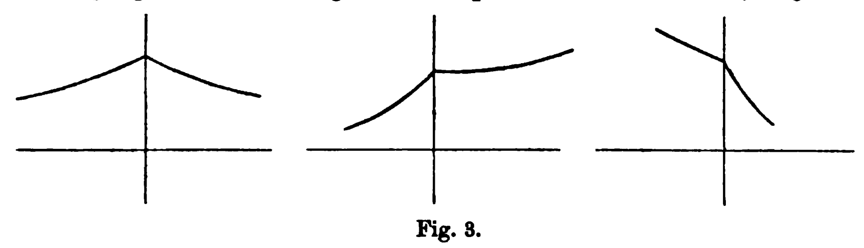


Fig. 3.

annehmen, bei denen der Knick immer convex nach oben ist. Bei negativen Belegungen dagegen ist der Knick stets concav nach oben, wie die Formen in Figur 4 zeigen.

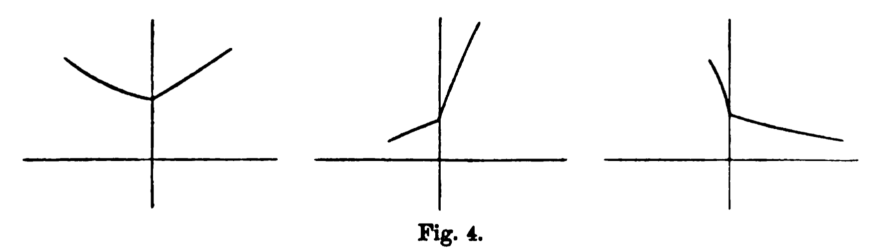


Fig. 4.

Nicht nur die in Richtung der Normale genommenen Differentialquotienten springen an geladenen Flächen, sondern auch die nach beliebiger anderer Richtung. Stetig bleiben, wie schon in § 12 erklärt, nur die in tangentialen Richtungen genommenen. Gehen wir in einer beliebigen Richtung x durch eine geladene Fläche, so ist es sehr leicht einzusehen, dafs $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ dabei den Sprung:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_- = -4\pi\varepsilon\cdot\cos(n\,x) \tag{57}$$

erleidet.

§ 18. Gleichförmige Doppelschichten auf Kugelflächen und Kreisscheiben.

Wir denken uns jetzt zunächst zwei concentrische Kugelflächen. Die innere vom Radius R_1 sei mit einer negativen Elektricitäts-

menge $-\mathfrak{e}$ gleichmäſsig belegt, so daſs die Flächendichtigkeit e_1 auf ihr gegeben ist durch

$$e_1 = -\frac{\mathfrak{e}}{4\pi R_1^2}. \tag{58$_1$}$$

Die äuſsere Kugelfläche vom Radius R_2 enthalte ein gleichgroſses positives Quantum $+\mathfrak{e}$ ebenfalls in gleichmäſsig vertheilter Flächendichtigkeit e_2. Dann ist

$$e_2 = +\frac{\mathfrak{e}}{4\pi R_2^2}. \tag{58$_2$}$$

Die Potentiale φ_1 und φ_2 beider einzelnen Belegungen superponiren sich an jeder Stelle des Raumes; sie sind nur abhängig von dem Abstand p des betrachteten Punktes vom Centrum der beiden Kugelflächen, und können aus den Formeln des § 15 entnommen werden.

Für $p > R_2$ liegt der Punkt auſserhalb beider geladenen Flächen; dort ist $\varphi_1 = -\frac{\mathfrak{e}}{p}$, $\varphi_2 = -\frac{\mathfrak{e}}{p}$, mithin

$$\varphi_a = -\frac{\mathfrak{e}}{p} + \frac{\mathfrak{e}}{p} = 0. \tag{59a}$$

Das Gesammtpotential ist im ganzen äuſseren Raume gleich Null, die beiden elektrischen Felder der beiden Belegungen heben sich dort auf, es besteht keinerlei Wirkung.

Für $p < R_1$ liegt der Punkt innerhalb beider Kugelflächen; dort ist $\varphi_1 = -\frac{\mathfrak{e}}{R_1}$ und $\varphi_2 = +\frac{\mathfrak{e}}{R_2}$, mithin

$$\varphi_i = -\frac{\mathfrak{e}}{R_1} + \frac{\mathfrak{e}}{R_2} = -\mathfrak{e}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \tag{59i}$$

Im Hohlraum der inneren Kugelfläche herrscht also ein constantes negatives Potential, ein elektrisches Feld besteht auch dort nicht.

Für $R_1 < p < R_2$ liegt der Punkt zwischen der inneren, negativ geladenen, und der äuſseren, positiv geladenen Kugelfläche. Dort ist $\varphi_1 = -\frac{\mathfrak{e}}{p}$, $\varphi_2 = +\frac{\mathfrak{e}}{R_2}$, also das Gesammtpotential:

$$\varphi_m = -\frac{\mathfrak{e}}{p} + \frac{\mathfrak{e}}{R_2}. \tag{59m}$$

In diesem mittleren Raumgebiet steigt also das Potential φ_m stetig von dem negativen Grenzwerth φ_i für $p = R_1$ an bis zu dem

Grenzwerth 0, welcher für $p = R_2$ gilt. Hier herrscht auch ein elektrisches Feld, welches ebenso stark ist, als wenn nur die negative Belegung der inneren Kugelfläche allein vorhanden wäre. Wenn wir die im vorigen Paragraphen empfohlene graphische Darstellung auf diesen Fall anwenden, und als Abscisse des Diagramms den Radiusvector p verwenden, welcher ja beide geladenen Flächen senkrecht durchsetzt, so erhalten wir für den Verlauf der Curve φ folgendes Bild (Figur 5). Das Stück φ_m gehört einer gleichseitigen Hyperbel an, deren Asymptoten den Diagrammaxen parallel laufen.

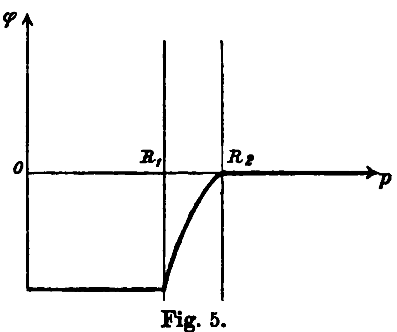


Fig. 5.

Wir wollen nun die beiden Kugelflächen bis auf einen verschwindenden Abstand $R_2 - R_1 = \delta R$ einander nähern. Die beiden Radien R_1 und R_2 streben dann gegen eine gemeinsame Grenze, die wir mit R bezeichnen; sie ist der Radius der kugelförmigen Doppelschicht. Die beiden Flächendichtigkeiten (58_1) und (58_2) streben den entgegengesetzt gleichen Werthen $\mp \frac{e}{4\pi R^2}$ zu. Nennen wir:

$$\frac{e}{4\pi R^2} = \varepsilon, \tag{60}$$

so wird im Grenzfall

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = +\varepsilon.$$

Der Potentialwerth im inneren Hohlraum wird dann nach (59i)

$$\varphi_i = -e\frac{\delta R}{R^2} = -4\pi R^2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\delta R}{R^2} = -4\pi\varepsilon \cdot \delta R,$$

während im äußeren Raume bleibt:

$$\varphi_a = 0.$$

Der Sprung, den das Potential selbst beim Durchgang durch die Doppelschicht erfährt, wird also

$$\varphi_a - \varphi_i = 4\pi\varepsilon \cdot \delta R. \tag{60a}$$

Läßt man bei diesem Grenzübergang die Ladungen unverändert, so muß die Sprunggröße wegen des Factors δR verschwinden, denkt man aber die Ladungen in demselben Maaße verstärkt, wie der Abstand der Flächen vermindert wird, so kann das Product $\varepsilon \cdot \delta R$

beim Grenzübergang einen festen endlichen Werth behalten, der dann unabhängig davon ist, wie weit man die Verkleinerung des δR in der Vorstellung treibt. Dies wollen wir jetzt als erfüllt ansehen. Das feste Product

$$e \cdot \delta R = \mathfrak{M} \tag{60b}$$

nennt man das Moment der Doppelschicht.

Die Bezeichnung Moment ist hergenommen von der Analogie mit dem Drehungsmoment eines Kräftepaares an einem Hebelarm. Dieses ist gleich Kraft mal Hebelarm und behält ebenfalls einen festen Grenzwerth, wenn bei verschwindendem Hebelarm die Intensität der Kräfte entsprechend gesteigert wird.

Die Sprunggröfse des Potentials wird nun

$$\varphi_a - \varphi_i = 4\pi\mathfrak{M}, \tag{60c}$$

behält also bei verschwindender Dicke der Doppelschicht einen festen endlichen Werth, der nur von dem Moment $\mathfrak{M}$ abhängt. Die Krümmung der Kugelfläche, also deren Radius, hat keinen Einflufs auf den Werth des Sprunges.

Als ein zweites Beispiel wollen wir eine Doppelschicht zusammensetzen aus zwei coaxialen ebenen Kreisscheiben vom Radius R, welche mit entgegengesetzt gleichen Elektricitätsmengen gleichmäfsig belegt sind.

Die gemeinsame Axe sei die x-Axe. In der Ebene $x = 0$ liege die mit der Dichtigkeit $-e$ belegte Scheibe, in der Ebene $x = h$ (> 0) liege die mit $+e$ belegte.

Das Potential für Punkte auf der x-Axe können wir nach den in § 14 entwickelten Formeln zusammensetzen. Von der negativen Scheibe rührt her:

$$\varphi_- = -2\pi e\left(\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2}\right),$$

von der positiven Scheibe:

$$\varphi_+ = +2\pi e\left(\sqrt{(x-h)^2 + R^2} - \sqrt{(x-h)^2}\right).$$

Die Wurzeln sind überall absolut zu nehmen. Beide Potentiale superponiren sich. Die x-Axe zerfällt in drei Gebiete:

1. $x < 0$; dort nennen wir das Potential φ_1,
2. $0 < x < h$; „ „ „ „ „ φ_2,
3. $h < x$; „ „ „ „ „ φ_3.

Man findet

$$\varphi_1 = -2\pi e\left(\sqrt{z^2+R^2}+z\right) + 2\pi e\left(\sqrt{(h-z)^2+R^2}-h+z\right)$$

$$\varphi_2 = -2\pi e\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right) + 2\pi e\left(\sqrt{(h-z)^2+R^2}-h+z\right)$$

$$\varphi_3 = -2\pi e\left(\sqrt{z^2+R^2}-z\right) + 2\pi e\left(\sqrt{(z-h)^2+R^2}+h-z\right)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= 2\pi e\{-h + \sqrt{(h-z)^2+R^2}-\sqrt{z^2+R^2}\}\\ \varphi_2 &= 2\pi e\{2z-h+\sqrt{(h-z)^2+R^2}-\sqrt{z^2+R^2}\}\\ \varphi_3 &= 2\pi e\{+h + \sqrt{(z-h)^2+R^2}-\sqrt{z^2+R^2}\}\end{aligned}\right\} \cdot \qquad (61)$$

Wir wollen nun den Abstand h im Verhältnifs zum Radius R so klein annehmen, dafs wir h^2 vernachlässigen dürfen; dann können wir die erste der Quadratwurzeln abgekürzt berechnen:

$$\sqrt{(h-z)^2+R^2} = \sqrt{z^2+R^2-2hz} = \sqrt{z^2+R^2}\cdot\sqrt{1-\frac{2hz}{z^2+R^2}} =$$

$$\sqrt{z^2+R^2}\cdot\left(1-\frac{hz}{z^2+R^2}\right)$$

$$\sqrt{(h-z)^2+R^2} = \sqrt{z^2+R^2} - \frac{hz}{\sqrt{z^2+R^2}}\cdot$$

Dies eingesetzt in die vorstehenden Ausdrücke giebt:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= 2\pi e h\cdot\left\{-1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right\}\\ \varphi_2 &= 2\pi e h\cdot\left\{\frac{2z}{h}-1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right\}\\ \varphi_3 &= 2\pi e h\ \left\{1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (61a)$$

Setzen wir nun wieder

$$e\cdot h = \mathfrak{M}$$

das Moment der Doppelschicht unabhängig von der Dicke h, so können wir zur Grenze $h = 0$ gehen. Aufser in dem constant bleibenden Momente $(e\cdot h)$ kommt die verschwindende Gröfse h nur noch in dem Gliede $\frac{2z}{h}$ der geschweiften Klammer von φ_2 vor. Da aber hier $0 < z < h$ bleibt, so schwankt das Glied nur zwischen den Zahlen 0 und 2, bleibt also endlich. Ueberhaupt bleibt das Potential

endlich und stetig, wenn es auch in dem engen Zwischenraum der Doppelschicht einen sehr steilen Anstieg besitzt. Betrachtet man aber die Grenzwerthe von φ_1 und φ_3 dicht an den beiden Seiten der Doppelschicht, also für verschwindend kleine Werthe von x, so findet man

$$\varphi_1 = -2\pi e h = -2\pi \mathfrak{M},$$
$$\varphi_3 = +2\pi e h = +2\pi \mathfrak{M}.$$

Das giebt den endlichen Sprung

$$\varphi_3 - \varphi_1 = 4\pi \mathfrak{M}, \tag{62}$$

welcher dieselbe Gröfse hat wie derjenige an der vorher betrachteten Kugeldoppelschicht, diesmal unabhängig vom Radius der Scheiben.

Während aber bei der Kugel die elektrischen Wirkungen sowohl im inneren wie im äufseren Raume sich vollständig vernichteten, bleibt hier bei der Scheibe zu beiden Seiten ein elektrisches Feld übrig, dessen Intensität man für die auf der x-Axe gelegenen Punkte leicht berechnen kann, indem man die Ausdrücke (61a) nach x differenzirt. Man findet so:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{M} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{(x^2+R^2)^3}} \\ Z_2 &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -2\pi \mathfrak{M} \left\{\frac{2}{h} - \frac{1}{R}\right\} \\ Z_3 &= -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{M} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{(x^2+R^2)^3}} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Die Kraft Z_2 wird für verschwindendes h negativ unendlich, im äufseren Raume dagegen ist Z_1 sowohl wie Z_3 durch denselben positiven Ausdruck gegeben. Scheidet man also den Zwischenraum 2) aus, so kann man sagen, der Differentialquotient von φ nach der Normale bleibt zu beiden Seiten der Doppelschicht stetig. Der Verlauf von φ als Function von x wird am besten durch das Diagramm Figur 6 auf folgender Seite illustrirt.

Das Uebrigbleiben von elektrischer Kraft im äufseren Raum läfst sich anschaulich erklären durch die offenen Ränder, mit denen die scheibenförmige Doppelschicht abschliefst. Betrachtet man nämlich den Ausdruck der elektrischen Kraft einer einfach belegten Scheibe (§ 14), welchen man schreiben kann:

$$Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\pi e \cdot \left(\pm 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right),$$

so sieht man, dafs dieser sich nicht ändert, wenn man x und R im gleichen Maafse vergröfsert oder verkleinert: Eine Scheibe von dopppelt so grofsem Radius übt aus doppelter Entfernung die gleiche Kraft aus. Verschiedene coaxiale Scheiben, welche auf einen Punkt der x-Axe alle die nämliche Wirkung ausüben sollen, müssen mit ihren Rändern auf ein und demselben Kegelmantel liegen, dessen Spitze der ausgewählte Punkt ist. Zwei benachbarte Kreisschnitte des Kegels, mit entgegengesetzt gleicher Flächendichtigkeit belegt, werden also ihre Wirkung in der Kegelspitze gerade aufheben. Dabei ist der der Spitze nähergelegene Querschnitt etwas kleiner. Unsere beiden Kreisflächen sind aber gleich grofs. Würde man z. B. von einem Punkte der positiven x-Axe den Kegelmantel durch den Rand der negativ geladenen Fläche legen, so würde er von der positiv geladenen Fläche einen Ring abschneiden, welcher aufserhalb bleibt. Die von dem Mantel umhüllte positive Ladung wird durch die ge-

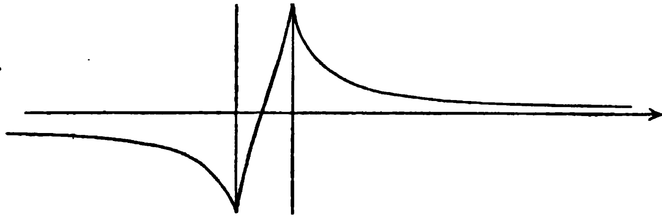


Fig. 6.

sammte negative Ladung in der Spitze des Kegels unwirksam gemacht. Dagegen bleibt die positive Ladung auf dem Randring wirksam und erzeugt die elektrische Kraft. Bei verschwindender Schichtdicke h wird allerdings der Randring verschwindend schmal, dafür aber die Flächendichtigkeit $+ e$ entsprechend grofs.

Die soeben betrachtete gleichmäfsige Belegung zweier Kreisflächen mit entgegengesetzt gleichen Ladungen ist nahezu verwirklicht bei den Platten-Condensatoren.

§ 19. Doppelschichten von beliebiger Art.

Der Begriff der elektrischen Doppelschichten, den wir an zwei leicht übersehbaren Beispielen kennen lernten, läfst sich verallgemeinern einmal dadurch, dafs die Gestalt der Fläche unbestimmt gelassen wird, und ferner durch die Möglichkeit, dafs das Moment der Doppelschicht von Stelle zu Stelle veränderliche Werthe besitzt.

Alsdann ist es zwar nicht mehr möglich die Potentialfunctionen der Belegungen durch geschlossene Rechenausdrücke explicite anzu-

geben, aber das Gesetz über den Potentialsprung, welches wir in den Sonderfällen Gleichungen (60c) und (62) gefunden hatten, läfst sich auch hier nachweisen.

Die Doppelschicht bilden wir in der Vorstellung auf folgende Weise:

Auf einer beliebig gestalteten Fläche im Raume, von der wir einstweilen nur verlangen wollen, dafs sie nirgends unendlich starke Krümmung (d. h. Kanten oder Ecken) besitze, denken wir in allen Punkten nach ein und derselben Seite hin Normalen errichtet von der gemeinsamen Höhe h, welche wir von vornherein als klein im Verhältnifs zum Radius der stärksten vorkommenden Flächenkrümmung festsetzen wollen. Den kleinen Bruch, welcher dieses Längenverhältnifs mifst, nennen wir α. Das Continuum der Endpunkte dieser Normalen bildet dann eine der ersten benachbarte, zweite Fläche, auf welcher, wie man leicht einsieht, die Normalen der ersten Fläche ebenfalls senkrecht stehen müssen. Die Beziehung der beiden Nachbarflächen zu einander ist durchaus wechselseitig; würden wir etwa einmal die zweite Fläche als die ursprünglich vorgeschriebene ansehen, so würde die Errichtung von rückwärts gerichteten Normalen h auf ihr zu genau derjenigen Fläche führen, die wir hier als die erste bezeichnet haben. Beide Flächen sind Punkt für Punkt auf einander bezogen durch die gemeinsamen Normalen. Auch den Flächenelementen ds_1, in welche man die Fläche 1 beliebig zertheilen kann, correspondiren bestimmte Elemente ds_2 der Fläche 2 dadurch, dafs ihre Randlinien durch gemeinsame Normalen verbunden sind. Der Gröfse nach sind die correspondirenden ds_1 und ds_2 nahezu gleich; an Stellen, wo die Fläche 1 nach der Seite der Normalen hin convex ist, werden die ds_2 ein wenig gröfser als die ds_1, an concaven Stellen werden sie ein wenig kleiner; jedenfalls liegt das Gröfsenverhältnifs beider überall näher am Werthe 1 als die Zahl $1 \pm 2\alpha$. (Erreicht wird diese Grenze an der Stelle von kleinstem Krümmungsradius nur dann, wenn dort die Krümmung kugelförmig gestaltet ist.)

Diese beiden Flächen denken wir nun mit Elektricität belegt in der Weise, dafs auf jedem Paar correspondirender Flächenelemente entgegengesetzte und absolut gleich grofse Mengen verbreitet sind. Die Anordnung der Flächendichtigkeit kann dabei auf einer der beiden Flächen willkürlich vorgeschrieben sein. So wollen wir annehmen, auf der Fläche 1 sei ϵ_1 eine im Allgemeinen von Ort zu Ort stetig veränderliche Dichtigkeit, welche freilich an gewissen Trennungslinien oder am offenen Rande der Fläche (wenn ein solcher

vorhanden) auch sprungweise Aenderungen zeigen darf. Auch Vorzeichenwechsel von Stelle zu Stelle sollen nicht ausgeschlossen sein. Im Innern hinreichend enger Flächenelemente $d s_1$ wird man die Vertheilung als gleichförmig ansehen dürfen.

Nach unserer Vorschrift ist nun hierdurch auch die Anordnung der Dichtigkeit e_2 auf der Fläche 2 bestimmt. Die Werthe e_1 und e_2, welche an correspondirenden Punkten herrschen, werden nahezu einander entgegengesetzt gleich. An Stellen, wo die $d s_2$ etwas größer als die $d s_1$ sind, wird $| e_2 |$ etwas kleiner als $| -e_1 |$ ausfallen, jedenfalls bleibt, wie man leicht durchschaut, das Verhältniſs $e_2 : e_1$ näher an dem Werthe -1 als die Zahl $-1 \pm 2\alpha$. Man kann dafür auch schreiben

$$| e_1 + e_2 | < 2 \alpha e_1 \text{ oder auch } | e_1 + e_2 | < 2 \alpha e_2. \tag{64}$$

Um nun den Verlauf des Potentials an dieser Doppelschicht zu erkennen, wählen wir zwei Beobachtungspunkte, welche mit zwei correspondirenden Punkten der beiden Flächen in der Lage zusammenfallen, von denen wir uns aber vorstellen wollen, daſs sie deutlich auf der Auſsenseite der Schicht liegen, wenngleich ihr Abstand von einander ebenfalls gleich h zu setzen ist. Wir haben es hier mit dem Potential φ zweier Flächenbelegungen zu thun, und wissen darüber schon aus den früheren Betrachtungen, daſs das Potential in einer belegten Fläche selbst endlich und stetig bleibt, sogar wenn die Dichtigkeit der Belegung dort in gewisser mäſsiger Weise über alle Grenzen wächst, daſs aber die Differentialquotienten nach der Normale beim Durchgang durch die Fläche springen proportional der Dichtigkeit. Wir wollen dem entsprechend das Potential φ in unserem Falle zerlegen in einen Summanden φ_1, welcher von der Belegung e_1 der Fläche 1 herrührt und einen Summanden φ_2 von der anderen Fläche her. Noch einen dritten Summanden, herrührend von irgend welchen sonst im Raume vorhandenen Ladungen, könnte man hinzufügen, doch bleibt dieser ohne jeden Einfluſs auf die Betrachtung, und mag ebenso wie eine willkürliche additive Constante hier fortbleiben. Es ist also:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{65}$$

Die Werthe, welche in dem Beobachtungspunkt an der ersten Fläche gelten, seien mit $\overline{\varphi}$, $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ bezeichnet, die Werthe in dem zweiten Beobachtungspunkt seien $\overline{\overline{\varphi}}$, $\overline{\overline{\varphi}}_1$, $\overline{\overline{\varphi}}_2$. Wegen der Stetigkeit der Potentialfunktionen kann man in der Nähe dieser beiden Stellen Reihenentwickelungen dafür setzen, und da wir die Länge h nachher

gegen Null abnehmen lassen wollen, solche, welche nach dem linearen Gliede abbrechen. Um die beiden entgegengesetzten Normalrichtungen zu unterscheiden, wollen wir diejenige, welche von der Fläche 2 nach der Fläche 1 zeigt, mit n_i, diejenige, welche von 1 nach 2 zeigt, mit n_a bezeichnen. Unter h verstehen wir den absoluten Betrag des Abstandes der beiden Flächen, also auch der beiden Beobachtungspunkte. Dann ist

$$\bar{\bar{\varphi}}_1 = \bar{\varphi}_1 + \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}} \cdot h,$$

$$\bar{\varphi}_2 = \bar{\bar{\varphi}}_2 + \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i}}} \cdot h$$

und somit

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\bar{\varphi}}_2 + \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i}}} \cdot h,$$

$$\bar{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\bar{\varphi}}_2 + \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}} \cdot h$$

und schliefslich durch Subtraction:

$$\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi} = \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}} - \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i}}}\right) \cdot h. \tag{65 a}$$

Für die Sprünge der Differentialquotienten gelten die von früher her bekannten Ausdrücke [vergl. Gleichung (56 a)]:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_i}} + \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}} &= -4\pi e_1 \quad \text{an der Fläche 1,} \\ \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i}}} + \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_a}}} &= -4\pi e_2 \quad \text{an der Fläche 2.} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Jede dieser beiden Relationen können wir benutzen zur Umformung der rechten Seiten von (65 a). Nehmen wir die zweite, so erhalten wir:

$$\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi} = \left(\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}} + \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_a}}} + 4\pi e_2\right) \cdot h. \tag{66 a}$$

Nehmen wir die erste Relation, so entsteht:

$$\bar{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi} = \left(-4\pi e_1 - \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_i}} - \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i}}}\right) \cdot h. \tag{66 b}$$

Um die Identität der beiden rechten Seiten dieser Gleichungen brauchen wir uns nur zu bekümmern für verschwindendes h, also auch nur für den Werth 0 des früher benutzten Bruches α. Dann ist

$$e_1 = -e_2, \tag{66c}$$

und da die beiden Flächen 1 und 2 nunmehr zusammenfallen und mit durchaus gleichen, aber entgegengesetzten Flächenbelegungen geladen sind, wird der Verlauf von φ_1 und φ_2 im Grenzfall bis auf das entgegengesetzte Vorzeichen der gleiche. Verfolgt man also beide Functionen, jede von der Fläche aus, welcher sie entspringt, in der Richtung n_a, so mufs ihr Gefälle gleich grofs, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sein oder die Summe beider Gefälle mufs verschwinden:

$$\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}} + \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_a}}} = 0. \tag{66d}$$

Das Gleiche findet man, wenn man die Differentialquotienten nach n_i bildet:

$$\overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_i}} + \overline{\overline{\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i}}} = 0. \tag{66e}$$

In Folge dieser Gleichungen (66 c, d, e) gehen die beiden Ausdrücke (66 a und b) über in

$$\overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi} = 4\pi e_2 h = -4\pi e_1 \cdot h.$$

Lassen wir nun das Product aus Flächendichtigkeit und Abstand beim Verschwinden des letzteren einen festen Grenzwerth $\mathfrak{M}$ annehmen, den wir das Moment der Doppelschicht an der betrachteten Stelle nennen, setzen also

$$\lim_{h=0}(e_2 h) = \lim_{h=0}(-e_1 h) = \mathfrak{M},$$

so wird

$$\overline{\overline{\varphi}} - \overline{\varphi} = 4\pi\mathfrak{M}. \tag{67}$$

Der Sprung des Potentials beim Durchgang durch die Doppelschicht ist gleich deren Moment an der Durchgangsstelle, multiplicirt mit 4π, und zwar springt das Potential h i n a u f, wenn zuerst die negative, dann die positive Belegung durchschritten wird, im entgegengesetzten Falle springt das Potential h i n a b.

Eine Fernwirkung kann von einer solchen beliebigen Doppelschicht im Allgemeinen wohl ausgehen. Wir hatten unter den ein-

fachen Beispielen im vorigen Paragraphen einen Fall ohne Fernwirkung (Kugel) und einen mit Fernwirkung (Scheibe) gefunden. Für das Potential eines Feldes, welches von einer Doppelschicht herrührt, läßt sich ein charakteristischer Integralausdruck aufstellen. Zunächst ist, wie bei allen Flächenbelegungen:

$$\varphi = \iint \frac{e_1\, ds_1}{r_1} + \iint \frac{e_2\, ds_2}{r_2} .$$

Dabei bedeuten r_1 und r_2 die Abstände eines Beobachtungspunktes im Raume von den Flächenelementen beider Belegungen. Wir nehmen die ds_1 und ds_2 als correspondirende Flächenelemente, dann ist nach Definition der Doppelschicht

$$e_1\, ds_1 = - e_2\, ds_2$$

und wir können beide Integrale in eines zusammenfassen:

$$\varphi = \iint e_2\, ds_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) .$$

Nun unterscheidet sich r_2 dadurch von r_1, dafs es hingerichtet ist nach einem Flächenelement, welches von ds_1 aus in der Richtung der Normale n_a um die Strecke h verschoben erscheint. Benutzen wir sogleich den Umstand, dafs h gegen die Grenze Null streben soll, so können wir durch ein Differential den Zuwachs des reciproken Radius bei dieser Verschiebung h ausdrücken. Es ist

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{1}{r_1}\right) \cdot h,$$

also

$$\varphi = \iint ds_2 \cdot e_2 \cdot h \cdot \frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{1}{r_1}\right) .$$

Da bei verschwindendem h die correspondirenden Flächenelemente zusammenfallen, so können wir bei ds_2 und r_1 die Zahlenindices weglassen. Ferner bezeichnen wir, wie vorher

$$e_2 \cdot h = \mathfrak{M}$$

und lassen auch bei n_a den Index weg, behalten jedoch im Sinne, dafs n die Normale auf derjenigen Seite der Doppelschicht bedeutet, deren Belegung (e_2) im Vorzeichen mit dem Moment übereinstimmt. Dann ist

$$\varphi = \iint ds \cdot \mathfrak{M}\, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) . \qquad (68)$$

Dieser Ausdruck besitzt eine Bildung, welche uns später noch wiederbegegnen wird, und für den wir dann sofort eine Deutung haben werden.

Wenn die Fläche, auf welcher die Doppelschicht liegt, geschlossen ist, und wenn ferner das Moment überall die gleiche Gröfse besitzt, so ist

$$\varphi = \mathfrak{M} \overline{\iint} ds \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \tag{68 a}$$

Von diesem Ausdruck läfst sich zeigen, dafs er für alle Punkte im äufseren Raume gleich Null ist, und für alle Punkte im Hohlraume der Fläche einen constanten Werth besitzt $= \pm 4\pi\mathfrak{M}$. Daraus folgt, dafs geschlossene Doppelschichten von beliebiger Gestalt, aber gleichmäfsig starkem Moment keine Fernwirkung ausüben.

Während das Potential selbst an einer Doppelschicht springt, bleibt aber dessen Differentialquotient nach der Normalen daselbst stetig, weil die beiden Sprünge von $\partial\varphi/\partial n$, welche den beiden einzelnen Belegungen entsprechen, entgegengesetzt gleich sind und sich defshalb aufheben. Dagegen mufs Unstetigkeit tangentialer Differentialquotienten zu beiden Seiten einer Doppelschicht von örtlich veränderlichem Moment auftreten, weil die Gröfse des Potentialsprunges mit dem Moment wechselt, also der Anstieg oder der Abfall des Potentials von Punkt zu Punkt der Doppelschicht auf beiden Seiten von ungleicher Gröfse sein mufs.

§ 20. Zusammenfassung der Beziehungen zwischen Ladungen und Potentialen.

Wir haben durch die bisherigen Betrachtungen die Hilfsmittel gewonnen um aus einem im Raume gegebenen Verlaufe der Werthe des elektrischen Potentials φ diejenige Vertheilung der Ladungen zu erkennen, welche das definirte Feld erzeugen, und auch umgekehrt aus gegebener statischer Vertheilung das zugehörige Potential zu berechnen.

Es sei zunächst φ eine eindeutige, beliebig vorgeschriebene Function der Raumcoordinaten. Sie selbst, wie auch ihre ersten und zweiten Differentialquotienten sollen im Allgemeinen überall stetigen Verlauf besitzen, jedoch soll es zulässig sein, dafs an gewissen gegebenen Flächen Sprünge des Verlaufes von φ, an anderen solche der ersten, an noch anderen solche der zweiten Differential-

quotienten von φ auftreten, auch dürfen Unstetigkeitsflächen der verschiedenen Arten zusammenfallen.

Man braucht dann erstens aus dem vorgeschriebenen Verlauf von φ nur denjenigen von $\Delta\varphi$ abzuleiten, was an allen Stellen aufser den Unstetigkeitsflächen zu eindeutig bestimmten, endlichen Werthen führt, und man hat in dem Ausdruck

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi \tag{69}$$

die Vertheilung der erforderlichen räumlichen Dichtigkeiten. Die Unstetigkeitsflächen der zweiten Differentialquotienten von φ werden auch solche von ε.

Ferner hat man die Unstetigkeitsflächen der ersten Differentialquotienten von φ durchzunehmen, und aus den gegebenen Daten die Sprünge von $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ abzuleiten. Diese ergeben die Elektricität, welche man auf diesen Unstetigkeitsflächen verbreitet anzunehmen hat, nach der Formel:

$$e = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right\}. \tag{69a}$$

Endlich erfordern die vorgeschriebenen Unstetigkeiten von φ Doppelschichten, deren Momente man ablesen kann nach der Formel:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{69b}$$

Sollen sich alle Ladungen, auf welche man so schliefsen kann, in endlicher Entfernung befinden, und eine endliche Summe geben, so mufs man freilich für den weiteren Verlauf von φ noch die Vorschrift hinzufügen, dafs φ in sehr grofser Entfernung R von irgend einem Punkt im Ladungsgebiet gegen Null abnimmt wie $\frac{\text{Const}}{R}$. Die Constante ist dann die algebraische Summe aller Ladungen, zu welcher die Doppelschichten nichts beitragen.

Hat man die umgekehrte Aufgabe zu lösen, bei welcher in einem endlichen Raumgebiet räumliche Ladungen von der vorgeschriebenen Dichtigkeit ε, Flächenbelegungen von der Dichtigkeit e, und Doppelschichten vom Moment $\mathfrak{M}$ gegeben sind, so findet man das Potential dieser Vertheilungen in der Formel:

$$\varphi = \iiint \frac{\varepsilon\, d\tau}{r} + \iint \frac{e\, ds}{r} + \iint \mathfrak{M}\, ds \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}. \tag{70}$$

Unter r ist dabei der Abstand des Punktes, in welchem φ bestimmt wird, von den Ladungselementen $\varepsilon\, d\tau$ und $e\, ds$, und von den Moment-Elementen $\mathfrak{M}\, ds$ zu verstehen, und die Richtung ∂n, nach welcher im letzten der drei Integrale differenzirt wird, weist von der negativen nach der positiven Belegung hin.

Dieser Ausdruck für φ giebt im ganzen Raume endliche eindeutige Werthe. Wenn wir freilich auch noch endlich geladene Punkte im Raume annehmen würden, so würden wir zu dem Ausdruck in Gleichung (70) noch Glieder von der Form $\frac{e}{r}$ zusetzen müssen, welche in den geladenen Centren unendlich werden. Solche Zusätze sind hier nicht nöthig, da punktförmige Ladungen in der Natur nicht anzunehmen sind, sondern nur ein bequemes mathematisches Hilfsmittel für viele Betrachtungen bilden. Ebenso wenig brauchen wir uns hier auf geladene Linien einzulassen.

Aus der Existenz der Potentialfunction mit den Eigenschaften, daſs sie überall endlich und eindeutig und im Allgemeinen auch stetig verläuft und in unendlicher Entfernung gegen Null abnimmt wie der reciproke Abstand, daraus folgen einige wichtige Eigenschaften des elektrischen Feldes, welche dessen Vertheilung sehr anschaulich machen.

Wir hatten bereits früher in § 7, als wir das Feld punktförmig gedachter Ladungen betrachteten, auf die Bedeutung der Aequipotentialflächen hingewiesen. Dieselben Betrachtungen können wir nun hier, und zwar ohne daß Ausnahmepunkte auszusparen wären, anwenden und wollen sie des Zusammenhangs wegen hier noch einmal von Anfang an darstellen. Da φ Function der Raumcoordinaten, z. B. der CARTESIschen, ist, bedeutet

$$\varphi(x, y, z) = \text{Constans}$$

nach der Lehre der analytischen Geometrie eine Fläche im Raume. Je nach der Wahl des Werthes der Constanten erhält man andere und andere Flächen, diese alle bilden eine continuirliche Schaar. Man kann auch eine diskrete Schaar von Flächen herausheben, wenn man der Constanten eine diskrete Reihe von Einzelwerthen, vortheilhaftester Weise eine arithmetische Reihe von Werthen vorschreibt. Je kleiner der Schnitt zwischen den Nachbarwerthen gewählt wird, um so enger rücken die Flächen zusammen, um so zahlreicher durchsetzen sie den Raum.

In der reinen Geometrie betrachtet man Flächenschaaren mannigfacher Art, welche dadurch geordnet sind, daſs sie sich aus einer

gemeinsamen Gleichung durch Variation eines Parameters ergeben, also ähnlich wie hier. Darunter sind häufig Schaaren von Flächen, welche sich mit ihren Nachbarn durchschneiden, so daſs eine gemeinsame umhüllende Fläche entsteht. Diese Erscheinung kann nun bei unseren Aequipotentialflächen niemals eintreten, weil in den Schnittcurven zweier Flächen dann die beiden verschiedenen Werthe der Constanten gelten muſsten, was der Eindeutigkeit des Potentialwerthes widerspricht. Aus demselben Grunde können sich auch zwei Potentialflächen nicht berühren. (Wegen Doppelschichten siehe S. 81). Eine Aequipotentialfläche kann auch nirgends mit offenem Rande abbrechen. (Wegen Doppelschichten siehe gleichfalls S. 81). Eine solche Fläche kann sich in unendliche Entfernung erstrecken, ohne daſs jemals ihre Grenze erreicht wird. Da wir aber alle Ladungen im Endlichen liegend voraussetzen, mithin überall in unendlicher Entfernung $\varphi = 0$ ist, so kann die ins Unendliche reichende Aequipotentialfläche nur diejenige einzige sein, für welche die Constante den Werth Null besitzt. Alle übrigen müssen im endlichen Raume bleiben und doch in dem Sinne grenzenlos sein, daſs sie keinen Rand besitzen, sie müssen also geschlossene Flächen sein. Dagegen ist es nicht nöthig, daſs sie aus einem einzigen zusammenhängenden Stück bestehen, sie können vielmehr aus zwei oder mehreren getrennten in sich geschlossenen Theilen bestehen bei dem gleichem Werth der Constanten. Da sich nun die zu verschiedenen Constanten gehörigen Flächen nicht durchschneiden dürfen, so muſs die eine die andere ganz umschlieſsen oder von ihr ganz umschlossen werden, oder aber sie können sich auch ganz ausschlieſsen, sind dann aber nicht benachbart. Da nun die Flächenschaar bei hinreichend kleinem Schritt der arithmetischen Constantenreihe eine sehr enggedrängte wird, bei der die Nachbarflächen dicht nebeneinander herlaufen, so wird der ganze Raum in dünne Schichten, Schalen oder Lamellen zerschnitten, deren Dicke zwar von Ort zu Ort veränderlich ist, aber nirgends verschwinden kann. Diese Lamellen, in die der Raum zerfällt, sind nun für die Anschauung des elektrischen Feldes sehr nützlich.

Erstens kann man in jedem Raumpunkt den Werth des Potentials gewissermaaſsen ablesen, indem man abzählt, in welcher Lamelle er liegt. Der Werth liegt dann zwischen den Constanten der beiden begrenzenden Nachbarflächen, und wenn der Schritt der Constantenreihe hinreichend klein ist, kann man ihn durch eine lineare Interpolation finden. Daraus folgt direct, daſs man auch die Arbeit ablesen kann, welche bei einer bestimmten Fortführung eines elektrischen Theilchens geleistet wird, indem man abzählt, wieviel Lamellen der

Weg durchsetzt. Die in Richtung steigenden Potentials durchsetzten Lamellen sind dabei positiv, die in Richtung sinkenden Potentials durchsetzten aber negativ zu zählen. Ist die so gefundene Zahl N und nennen wir den festen Schritt der Constantenreihe δ, so ist $N \cdot \delta$ der Ueberschufs des Potentials im Endpunkt über dessen Werth im Ausgangspunkt, und diese Differenz giebt multiplicirt mit der bewegten Ladung die geleistete Arbeit. Vergl. Gleichung (16a) auf S. 23.

Zweitens kann man Richtung und Intensität der elektrischen Kraft an jeder Stelle des Feldes unmittelbar erkennen. Nämlich das Gefälle der Potentialfunction ist selbstverständlicher Weise in allen tangentialen Richtungen zu den Niveauflächen gleich Null und hat normal auf ihnen den gröfsten Wert; in der Richtung des steilsten Abfalls von φ liegt aber der Pfeil der elektrischen Kraft. Denkt man also Linien im Raume, welche die Niveauflächen überall senkrecht durchsetzen, so folgen diese der Richtung der elektrischen Kraft. Sie heifsen nach Faradays Bezeichnung Kraftlinien. Man kann sie im Allgemeinen eindeutig und stetig verfolgen. Aber nicht nur über die Richtung der Kraft, sondern auch über deren Gröfse gewinnt man Aufschlufs. Man kann nämlich bei hinreichend dichter Niveauflächenschaar die Stücke der im Allgemeinen stetig gekrümmten Kraftliniencurven, soweit sie zwischen zwei Nachbarflächen liegen, als geradlinige Längenelemente ansehen, welche auf beiden Flächen senkrecht stehen und die Dicke h der Lamelle an der betreffenden Stelle messen. Ist das Gefälle in der Normalrichtung mit $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{E}$ bezeichnet, so hat man für den Uebergang aus einer Fläche in die Nachbarfläche die Gleichung

$$\delta = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot h = \mathfrak{E} \cdot h. \tag{71}$$

Da nun δ zufolge der Anlage der Niveauflächen im ganzen Raume constant denselben Werth besitzt, so ist auch das Product $E \cdot h$ constant, mithin die Stärke der elektrischen Kraft allenthalben umgekehrt proportional der Schichtdicke der Lamellen, ja man kann den Betrag im absoluten Maafse ablesen, wenn δ in solchem Maafse bekannt ist und h in Centimetern gemessen wird.

Ueber den Verlauf der Kraftlinien kann man im Allgemeinen aussagen, dafs sie, von einem Ausgangspunkt an verfolgt, nicht wieder zu diesem zurückführen können, auch nicht zu einem Punkt, der mit dem Ausgangspunkt auf gleicher Niveaufläche liegt. Denn

wenn man immer in Richtung des Gefälles von φ fortschreitet, kann man nicht zu dem Anfangswerth zurückkehren, also bei eindeutigem Potential auch nicht zum Ausgangspunkt. Die Doppelschichten, an deren beiden Seiten ja Potentialwerthe von endlicher Differenz herrschen, lassen allerdings geschlossene Kraftlinien möglich erscheinen, nämlich solche, welche auf der einen Belegung beginnen und mit Umgehung eines offenen Randes der Doppelschicht auf dem correspondirenden Punkt der anderen Belegung endigen. Dann fällt bei verschwindender Dicke der Doppelschicht allerdings Anfangs- und Endpunkt der Kraftlinie zusammen, diese erscheint geschlossen. So lange wir indessen die Doppelschicht als ein reales elektrostatisches Gebilde betrachten, bleibt doch immer der, wenn auch verschwindend dünne Raum zwischen den beiden unendlich starken Belegungen übrig, in welchem auch ein unendlich starkes Feld von entgegengesetzter Richtung herrscht. Man kann in gewissem Sinne sagen, eine Doppelschicht verhält sich wie eine Trennungsfläche, welche den Kraftlinien den Durchgang versperrt.

Im Gebiete der elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen kommen aber thatsächlich in sich zurücklaufende Kraftlinien vor, welche man ohne Unterbrechung beliebig oft in Richtung fallenden oder steigenden Potentials durchlaufen kann. In solchen Feldern ist aber das Potential nicht eindeutig, sondern besitzt eine unendliche Reihe von Werthen, und zwar sinkt oder steigt bei jeder vollen Umkreisung, also Rückkehr zum selben Punkte, der Potentialwerth um den gleichen Betrag, den wir die Periode nennen wollen. Ferner ist dabei wichtig, dafs solche Potentialfelder mit geschlossenen Kraftlinien niemals im ganzen Raume existiren, sondern immer nur in mindestens zweifach zusammenhängenden Raumgebieten, während in den ausgeschlossenen, ebenfalls mehrfach zusammenhängenden Gebieten die Feldintensität überhaupt nicht als Gefälle einer Potentialfunction dargestellt werden kann.

Könnte man z. B. in einem Eisenring die pollose magnetische Induction während eines endlichen Zeitintervalls ganz gleichmäfsig zunehmen oder abnehmen lassen (allerdings praktisch kaum realisirbar), so würde in dem vom Eisenring ausgesparten zweifach zusammenhängenden Raume während dessen ein zeitlich constantes elektrisches Feld herrschen, dessen Potential die hier charakterisirte Eigenschaft besitzt. Jede elektrische Kraftlinie ist als geschlossene Curve mit dem Eisenring verschlungen wie zwei zusammenhängende Kettenglieder. (Sobald das Wachsthum der magnetischen Induction ungleichmäfsig ist, wird dieses Beispiel hinfällig, weil dann die

elektrische Feldstärke schwankt und auf zeitlich variable Vorgänge der Potentialbegriff keine Anwendung findet.) Die entsprechende Erscheinung eines magnetischen Feldes (für welches ganz analoge Begriffe gelten) mit vieldeutigen Potentialwerthen kann man sehr leicht experimentell verwirklichen in dem Raume um einen von constantem galvanischem Strome durchflossenen Ringleiter.

Nun kann man einen zweifach zusammenhängenden Raum durch eine Schnittfläche in einen einfach zusammenhängenden verwandeln, wobei dann beide Seiten der Schnittfläche mit zur Begrenzung zu rechnen sind. Wir denken also in den Eisenring resp. in den ringförmigen Stromleiter wie in einen Rahmen irgend eine Fläche gespannt, durch welche der Durchtritt verhindert sein soll. Alsdann ist auch ein wiederholtes Durchlaufen der ringförmigen Kraftlinien unmöglich; man kann höchstens auf der einen Seite der Trennungsfläche beginnen und einer Kraftlinie auf einer einmaligen Umkreisung folgen bis man auf dem correspondirenden Punkt der anderen Seite angelangt ist. Dann ist man wieder am selben Ort im Raum, man kann aber nicht weiter. Das elektrische resp. magnetische Potential ist dabei gesunken oder gestiegen gerade um den Betrag einer Periode. Wir stehen also vor dem Ergebnifs, dafs das Potential an beiden Seiten der Trennungsfläche verschiedene Werthe hat, dort unstetig ist; aber die Vieldeutigkeit ist jetzt ausgeschlossen. Dieses Feld könnte durch elektrostatische resp. magnetostatische Belegung der Trennungsfläche mit einer Doppelschicht erzeugt werden, deren überall gleich starkes Moment aus der Bedingung: $4\pi\mathfrak{M} =$ Periode folgt. Freilich dürften statische Belegungen der Ringoberflächen, wenn diese breit genug sind, auch noch nötig sein zur getreuen Wiedergabe des Feldes, für sehr dünne Ringe indessen genügt die Doppelschicht, und man sieht hieraus, dafs deren Fiktion mitunter von Nutzen sein kann, um ein elektromagnetisches Problem auf ein statisches zurück zu führen.

Der Potentialwerth war in diesen Fällen wenigstens bis auf ein unbestimmtes Vielfaches der Periode bekannt. Ganz unbestimmt wird er, wenn man zwei solche Ringe im Raume annimmt und die beiden Perioden, welche der Durchschlingung jedes einzelnen entsprechen, incommensurabel sein läfst. Dann kann man durch genügend häufige Umschlingung beider Ringe in geeigneten Umdrehungssinnen freilich das Potential in einem Punkt jedem gewünschten Zahlenwerth beliebig nahe bringen.

Aber das Feld — die Richtung und Intensität — also das Gefälle von φ bleibt trotzdem eindeutig.

Nach diesem vorläufigen Ausblick auf ein Gebiet, welches wir erst später behandeln werden, kehren wir zurück zu den elektrostatischen Feldern mit eindeutigem Potential, um noch einige typische Erscheinungen des Verlaufs der Niveauflächen und der Kraftlinien zu betrachten an Stellen des Raumes, wo einfache Flächenbelegungen und wo Doppelschichten liegen.

Laufen Kraftlinien unter schrägem Winkel durch eine mit Elektricität belegte Fläche, so werden sie dabei gebrochen. Zerlegt man nämlich die elektrische Kraft zu beiden Seiten in eine Componente normal zur Fläche und eine tangentiale, so hat erstere beiderseits verschiedene Werthe, weil $\partial \varphi / \partial n$ unstetig ist, während die zweite beiderseits gleichen Werth hat, die Resultanten müssen dabei diesseits und jenseits verschiedene Richtung haben, aber beide Richtungen müssen mit der Normalen in einer Ebene (Einfallsebene) liegen. Nur in dem Falle, dafs die Kraftlinien selbst in Richtung der Normalen auf der Fläche stehen, bleiben sie ungebrochen. Da nun ferner die Aequipotentialflächen beiderseits senkrecht zu den Kraftlinien verlaufen, müssen solche, wo sie eine Flächenbelegung durchsetzen, längs der Schnittcurve geknickt erscheinen, ohne dafs indessen ihr Zusammenhang zerrissen wird. Die Dicke h der Lamellen vom festen Potentialschritt δ ist zu beiden Seiten der Belegung verschieden. Nur in dem Falle, dafs die belegte Fläche selbst zu den Aequipotentialflächen gehört, tritt kein solcher Knick auf, weil eben keine der anderen Flächen sie durchsetzt; aber die Unstetigkeit von h besteht auch dann. Die Dicke der Lamellen, die sonst im Raume bei den Nachbarn nahezu die gleiche ist, wird plötzlich verändert, wenn eine der Trennungsflächen geladen ist.

Anders ist die Störung des Verlaufs, wo die Niveauflächen eine Doppelschicht durchsetzen: Die Doppelschicht zwingt die Niveauflächen, welche auf sie stofsen, ein endliches Stück ihres Verlaufes in ihr selbst zurückzulegen, bis sie sie dann an einer anderen Stelle in den jenseitigen Raum entläfst. So kommt es, dafs in der Doppelschicht eine Reihe auf einander folgender Lamellen räumlich zusammengeprefst zu verschwindender Dicke zu denken ist. Die Anzahl dieser verdichteten Lamellen ist so grofs, dafs der vom Moment abhängige Potentialsprung in den correspondirenden Punkten beider Seiten der Schicht zu Stande kommt. Läfst man jedoch den inneren Raum zwischen der Doppelschicht aus der Betrachtung weg, so bricht jede Aequipotentialfläche in einer offenen Randcurve an der einen Seite der Schicht ab, und beginnt auf einer räumlich getrennten Randcurve an der anderen Seite ihre Fortsetzung. Das Bild, welches

die Lamellen zeigen, kann man anschaulich durch den in der Geologie bei der Lehre von den geschichteten Gesteinslagern gebräuchlichen Namen „Verwerfung“ bezeichnen. Bei Doppelschichten von constantem Moment ist diese Verwerfung überall die gleiche und die Neigung der Aequipotentialflächen auf beiden Seiten wird nicht geändert. Die Kraftlinien, welche die Flächenschaar senkrecht durchsetzen, haben dann zu beiden Seiten gleiche Richtung, auch die Lamellendicke h wird nicht verändert; die elektrische Kraft bleibt dann stetig. Im Falle, dafs die Doppelschicht selbst zu den Niveauflächen gehört, fällt die Verwerfung fort, dagegen scheinen alle diejenigen Lamellen verschwunden, deren Potentialwerth zwischen den Grenzwerthen des Sprunges von φ liegen und es berühren sich in der doppelt belegten Fläche zwei Aequipotentialflächen mit endlich verschiedenem Werthe der Constanten. Diese Umstände führen dann also, wenn man das Innere der Doppelschicht vernachlässigt, zu gewissen Beschränkungen der oben (S. 76) ausgesprochenen Sätze.

Die am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Formeln (69) und (69 a) kann man ohne Benützung des Potentialbegriffs auf die Formen:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varepsilon \tag{69 c}$$

$$\mathfrak{E}_{n_1} + \mathfrak{E}_{n_2} = 4\pi e \tag{69 d}$$

bringen, wobei $\mathfrak{E}_{n_1}$ und $\mathfrak{E}_{n_2}$ die Componenten der elektrischen Feldstärke in Richtungen der beiden Normalen n_1 und n_2 bezeichnen. Diese Gleichungen sind unter der Voraussetzung abgeleitet, dafs für die Feldstärke eine Potentialfunction existirt. Sie gelten aber allgemeiner auch für zeitlich variable Felder, in denen dies nicht mehr der Fall ist. Denn es superponiren sich dann, wie später gezeigt werden wird, zu den von den Ladungen ε und e herrührenden Kraftcomponenten $X^{(1)}$, $Y^{(2)}$, $Z^{(2)}$, nur solche andere Componenten $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$, $Z^{(2)}$, für welche immer

$$\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial Y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial Z^{(2)}}{\partial z} = 0$$

$$\mathfrak{E}^{(2)}_{n_1} + \mathfrak{E}^{(2)}_{n_2} = 0$$

erfüllt ist, so dafs auch dann

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \ldots = \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x} + \ldots = 4\pi\varepsilon$$

$$\mathfrak{E}_{n_1} + \ldots = \mathfrak{E}^{(1)}_{n_1} + \ldots + \mathfrak{E}^{(2)}_{n_2} + \ldots = 4\pi e$$

gültig bleibt.

§ 21. Der Green'sche Satz.

Dieser für die weitere Entwickelung der Potentialtheorie wichtige analytische Satz giebt eine Art partieller Integration an, durch welche von einem gewissen Raumintegral ein Oberflächenintegral abgespalten wird, während ein Restintegral über den Raum zurückbleibt. Es giebt analoge Operationen auch an Integralen in einer Ebene, aus denen dann ein Randintegral abgespalten wird, und auch die gewöhnliche partielle Integration an einfachen Integralen, welche die Grenzwerthe aus dem Integrandus abspaltet, gehört hierher. Wir betrachten aber sogleich das räumliche Problem. Es sei zunächst vorgelegt das Raumintegral:

$$\Phi_x = \iiint L \frac{\partial V}{\partial x} dx\, dy\, dz. \tag{72}$$

Dieses soll erstreckt werden über ein durch eine geschlossene Fläche begrenztes Raumgebiet. L und V seien zwei vorgeschriebene Functionen der Coordinaten x, y, z, und sollen so beschaffen sein, daſs Φ_x einen endlichen, eindeutigen Werth besitzt. Also L und $\partial V/\partial x$ müssen eindeutig sein, dagegen könnte V selbst noch vieldeutig sein, wie dies z. B. bei den im vorigen Paragraphen erwähnten Potentialfunctionen in mehrfach zusammenhängenden Räumen vorkommt. Stetig braucht weder L noch $\partial V/\partial x$ zu sein, beide können vielmehr an bestimmten Flächen im Integrationsraume springen. Auch in gewissem Grade unendlich können beide Factoren an einzelnen Stellen werden, ohne daſs der Werth Φ_x dadurch seine Bestimmtheit und Endlichkeit verliert.

Nun machen wir den ersten Schritt zur Transformation: Wir sehen $L \cdot \partial V/\partial x$ als Theil eines vollständigen Differentialquotienten nach x an, welch' letzteren wir durch Hinzufügung von $V \cdot \partial L/\partial x$ erhalten. Wir bilden also:

$$\Phi_x + \iiint V \frac{\partial L}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iiint \frac{\partial}{\partial x}(L\, V) dx\, dy\, dz. \tag{72a}$$

Damit diese Gleichung einen bestimmten Sinn habe, müssen wir mehr Bedingungen stellen, als vorher für Φ_x nötig waren. Es muſs nämlich jetzt V selbst eindeutig sein und $\partial L/\partial x$ muſs die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Solche Fälle also, in denen zwar L in unschädlicher Weise unendlich wird, während $\partial L/\partial x$ dies in heftiger, schädlicher Weise thut, sind jetzt nicht mehr zulässig.

Dieser erste Schritt ist nur die Vorbereitung für den zweiten: die partielle Integration des rechts stehenden Integrals, welches wir schreiben können

$$\iint dy\,dz \cdot \int dx \frac{\partial(LV)}{dx}.$$

Für jedes Flächenelement $dy\,dz$ ist

$$\int dx \frac{\partial(LV)}{\partial x} = \overline{\underline{LV}}.$$

Der Sinn dieser Formel ist folgender: Auf dem Flächenelement $dy\,dz$ steht senkrecht eine gerade Linie parallel der x-Axe. Geht man auf dieser Geraden in Richtung der positiv wachsenden Abscissen vorwärts, so betritt man an einer bestimmten Stelle das Integrationsgebiet, dort an der Grenze hat das Produkt LV einen bestimmten Werth, den wir mit $\underline{LV}$ bezeichnen. Geht man weiter, so kommt man endlich zu der Stelle, wo das Integrationsgebiet wieder verlassen wird; der dort herrschende Werth sei mit $\overline{LV}$ bezeichnet. Die Differenz beider Werthe ist oben mit $\overline{\underline{LV}}$ bezeichnet:

$$\overline{LV} - \underline{LV} = \overline{\underline{LV}}$$

und hat für jedes Flächenelement $dy\,dz$ ihren besonderen Betrag, der von der Führung der Raumgrenze und dem räumlichen Verlauf von LV abhängt. Die Oberfläche des Raumes kann auch so gestaltet sein, daſs die zu x parallele gerade Linie das Integrationsgebiet in mehreren getrennten Strecken durchsetzt, so daſs mehrere Eintritts- und Austrittsstellen auf einander folgen. In solchen Fällen bedeutet $\overline{\underline{LV}}$ nicht die einfache Differenz, welche in letzter Gleichung steht, sondern eine algebraische Summe, in welcher die Werthe von LV an allen Eintrittsstellen negativ, an allen Austrittsstellen positiv einzusetzen sind. Ein wesentlicher Unterschied wird durch diese Complication indessen nicht in den Sinn der Betrachtung gebracht. Der zweite Schritt führt also zu der Gleichung

$$\Phi_s + \iiint V \frac{\partial L}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz\,\overline{\underline{LV}}. \qquad (72\,b)$$

Die Beschränkungen, die für die Functionen L, V und deren Differentialquotienten zu machen sind, haben sich aber wiederum vermehrt, denn die partielle Integration liefert in der hier explicite

6*

hingestellten Form nur dann einen richtigen Werth, d. h. denselben, welchen die linke Seite besitzt, wenn $L\,V$ im ganzen Integrationsgebiet stetig verläuft. Wenn dagegen dieses Produkt im Bereiche der vorkommenden Werthe von x irgendwo discontinuirlich wird, so würde in dem Ausdruck $\overline{\underline{L\,V}}$ dieser Sprung enthalten sein, während er in $\int dx \frac{\partial}{\partial x}(L\,V)$ fehlt. Die Mathematiker haben sich mit solchen Problemen, in denen Integrale über springende Functionen partiell integrirt werden, vielfach beschäftigt, in der Physik kommt man aber meist vortheilhaft mit dem Umwege aus, dafs die Sprünge als sehr steile, aber doch stetige Veränderungen angesehen werden. Thut man dies, so fehlt der Einflufs des Sprunges auch in dem Ausdruck $\int dx \frac{\partial}{\partial x}(L\,V)$ nicht, denn dieser wird dann an der Sprungstelle des Differentialquotienten so grofs, dafs ein einzelnes Differential der Summe einen endlichen Werth annimmt und zwar gerade denjenigen, welcher sonst die Gleichung stören würde. Kann man mit diesem Princip der continuirlichen Uebergänge nicht gut auskommen, so mufs man beide Seiten der Unstetigkeitsflächen mit unter die Raumgrenzen des Integrals aufnehmen.

Der dritte Schritt ist die Verwandlung des Doppelintegrals in ein Oberflächenintegral über die Begrenzung des Integrationsraumes. Der Integrand $\overline{\underline{L\,V}}$ setzt sich bereits aus allen Oberflächenwerthen zusammen und zwar für jedes einzelne $d\,y\,d\,x$ aus denjenigen, welche beim Fortschreiten in der x-Richtung von dort aus getroffen werden. Geeignete Oberflächenelemente an denselben Stellen findet man nun, wenn man auf jedem der kleinen Rechtecke $d\,y\,d\,x$ als Basis eine gerade Säule errichtet denkt. Diese dringt, in wachsender x-Richtung verfolgt, einmal in den Integrationsraum ein, wobei sie ein Flächenelement $\underline{d\,s}$ aus dessen Umgrenzung herausschneidet. Weiterhin tritt sie wieder heraus unter Herausschneidung eines zweiten Flächenelementes $\overline{d\,s}$. Bei complicirterer Gestalt des Integrationsbereiches kann dann ein nochmaliger Eintritt und Austritt folgen u. s. w., jedesmal unter Zeichnung zweier Oberflächenelemente. Alle diese $d\,s$ sind im Allgemeinen schräge Schnitte der dünnen rechteckigen Säule, also von parallelogrammatischer Gestalt. Ihre Gröfse hängt von der Neigung der Normalen n gegen die x-Richtung ab, denn es ist

$$d\,s = \frac{d\,y\,d\,x}{\cos(n, x)},$$

oder umgekehrt

$$dy\,dz = ds\cos(nx).$$

Nun wollen wir vorschreiben, dafs die Normalen überall ins Innere des Integrationsraumes gerichtet sein sollen, dann wird der Winkel (nx) an den Eintrittsstellen der Säule spitz, an den Austrittsstellen stumpf, sein Cosinus also im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Unter $dy\,dz$ sowohl wie unter ds verstehen wir aber absolute Beträge, defshalb müssen wir in vorstehender Formel, soweit sie sich auf Elemente $\overline{ds}$ an Austrittsstellen bezieht, den negativen Cosinus durch ein vorgesetztes Minuszeichen positiv machen. Es gilt demnach:

$$dy\,dz = \underline{ds}\cos(\underline{n}x) = -\overline{ds}\cos(\overline{n}x)$$

und ein einzelnes Glied des Doppelintegrales aus (72b) kann folgendermaafsen umgeformt werden:

$$dy\,dz\,\underline{\overline{LV}} = dy\,dz(\overline{LV} - \underline{LV}) = -\overline{ds}\,\overline{LV}\cos\overline{n}x - \underline{ds}\,\underline{LV}\cos\underline{n}x.$$

In dem complicirteren Falle, dafs die Säule das Gebiet mehrmals durchsetzt, erhält man auf der rechten Seite vier, sechs u. s. w. solche Glieder, wie hier zwei angegeben sind; die weitere Betrachtung wird dadurch nicht gestört. Das Wichtige und Wesentliche besteht darin, dafs der Unterschied zwischen Eintritts- und Austrittsstellen verschwunden ist: Alle Glieder haben dasselbe explicite Minuszeichen. Da nun durch die Gesammtheit aller der gedachten Säulen auch die gesammte Oberfläche unseres Raumgebietes parzellirt wird, so folgt:

$$\iint dy\,dz\,\underline{\overline{LV}} = -\overline{\iint} ds\,LV\cos nx.$$

Die Bezeichnung $\overline{\iint} ds \ldots$ soll Integration über die geschlossene Oberfläche des Gebietes bedeuten. Da man nun weifs, dafs der Werth eines solchen Integrals von der Form des Netzes der ds, welches zur Aufstellung oder Berechnung gedient hat, unabhängig ist, so braucht man sich nun unter den ds nicht mehr die Spuren jener Säulenschnitte zu denken, sondern kann ein beliebiges anderes Netz auf der Oberfläche annehmen. Bei diesem dritten Schritt sind keine neuen Beschränkungen der Gültigkeit hinzugekommen. Das bisherige Resultat lautet nun:

$$\Phi_x + \iiint V\frac{\partial L}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\overline{\iint} ds\,LV\cos nx. \qquad (72\text{c})$$

Nun seien noch zwei ganz analog gebaute Integrale über denselben Raum zu erstrecken, nämlich:

$$\Phi_y = \iiint M \frac{\partial V}{\partial y} dx\, dy\, dz \quad \text{und} \quad \Phi_z = \iiint N \frac{\partial V}{\partial z} dx\, dy\, dz. \tag{73}$$

Bedingungen dafür sind Eindeutigkeit der beiden neuen Functionen M und N und der Differentialquotienten von V. Stetigkeit nicht erforderlich, beschränktes Wachsthum ins Unendliche zulässig, ganz wie oben für Φ_x. Nun führen wir dieselben drei Schritte der Transformation aus. Beim ersten Schritt mufs gefordert werden, dafs $\partial M / \partial y$ und $\partial N / \partial z$ nicht in schädlicher Weise unendlich werden, und dafs V selbst eindeutig ist. Beim zweiten Schritt treten die Bedingungen hinzu, dafs MV und NV im ganzen Raumgebiet stetig verlaufen müssen, widrigenfalls die Sprungflächen und zwar beide Seiten derselben mit unter die Begrenzung des Raumes zu rechnen sind, oder man sich helfen mufs mit dem Princip der continuirlichen Uebergänge.

Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so kann man zwei Formeln analog (72c) aufstellen, und dann alle drei addiren. Die Integrale kann man dabei, da sie sich über dieselben Gebiete erstrecken, in je eines zusammenfassen. An Stelle der Abkürzungen Φ_x, Φ_y, Φ_z setzen wir die vorgeschriebenen Integrale. Dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \left\{ L \frac{\partial V}{\partial x} + M \frac{\partial V}{\partial y} + N \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz \\ &+ \iiint V \left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right] dx\, dy\, dz \\ &= -\overline{\iint} ds\, V \big(L \cos(n x) + M \cos(n y) + N \cos(n z) \big). \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Diese Gleichung enthält bereits den Green'schen Satz in sich, ist aber allgemeiner. Die drei vorgeschriebenen Raumfunctionen L, M, N kann man deuten als die Componenten in Richtung der Axen x, y, z von einer in jedem Punkte des Raumes gegebenen gerichteten Gröfse, und diesen Sinn haben sie wohl auch physikalisch in allen Fällen, wo diese Gleichung von Nutzen ist; die Function V dagegen denken wir uns hier als eine ungerichtete Gröfse, deren Differentialquotienten im ersten Raumintegral die negativen Componenten einer zweiten gerichteten Gröfse angeben, und zwar einer solchen, welche die Besonderheit hat, sich als Gefälle einer ungerichteten Gröfse

darstellen zu lassen. Die Gleichung (74), welche doch auf ein bestimmt orientirtes Axensystem bezogen erscheint, enthält dann lauter Ausdrücke von absoluter Bedeutung. Die geschweifte Klammer des ersten Integrals giebt nach HERMANN GRASSMANN's Bezeichnung das innere Product der beiden Vectoren und zwar mit negativem Vorzeichen, da wir als Componenten des zweiten Vectors die negativen Differentialquotienten von V einführen. Dieses innere Product ist eine ungerichtete Gröfse, deren Werth nicht von der Orientirung des Axensystems abhängt. Sein Werth ist gleich dem Product der beiden Vectorlängen und dem Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels. Im zweiten Integral bedeutet die eckige Klammer die sogenannte Divergenz des ersten Vectors, eine ebenfalls ungerichtete Gröfse. Die runde Klammer im Oberflächenintegral endlich bedeutet die in Richtung der inneren Normale fallende Componente des ersten Vectors, ist also ebenfalls unabhängig vom gewählten Axensystem.

Um nun auf den GREEN'schen Satz zu kommen, nehmen wir für den ersten Vector ebenfalls einen solchen, welcher als Gefälle einer ungerichteten Raumfunction U dargestellt werden kann, setzen also:

$$L = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{74a}$$

Die für L, M, N zum Bestande der Gleichung (74) nöthigen Bedingungen müssen wir nun verwenden, um die Bedingungen für die neu eingeführte Function U zu finden. Die zweiten Differentialquotienten von U, das sind die $\frac{\partial L}{\partial x}$ etc., müssen integrabel sein, dürfen also nicht in schädlicher Weise unendlich werden, wie das z. B. eintritt, wenn U das Potential einer punktförmigen Ladung ist. Die ersten Differentialquotienten von U, das sind die L, etc. selbst, müssen stetig sein. Eindeutig müssen alle Differentialquotienten sein. Dagegen U selbst, welches in der Gleichung gar nicht vorkommt, könnte vieldeutig sein, wie die elektromagnetischen Potentiale in mehrfach zusammenhängenden Räumen. Dafs mehrfach zusammenhängende Räume als Integrationsbezirk bei unserem Satz verwendet werden dürfen, begegnet keinen Bedenken sofern in ihnen die nöthigen Eindeutigkeitsbedingungen erfüllt sind, das mehrfache Ein- und Austreten der Säulen haben wir oben besonders berücksichtigt.

Bei der Einsetzung der Vorschriften (74a) in die Gleichung (74) geht die geschweifte Klammer im ersten Integral über in

$$-\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right\}.$$

Die eckige Klammer des zweiten Integrals wird:

$$-\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] = -\Delta U,$$

bildet also die LAPLACE'sche Operation an U, deren Bedeutsamkeit bei Potentialfunctionen wir schon kennen. Die runde Klammer im Oberflächenintegral endlich mufs, da sie die Vectorcomponente in Richtung der inneren Normalen angiebt, übergehen in

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right).$$

Dies kann man leicht direct verificiren. Geht man nämlich in Richtung der Normalen von der Oberfläche in's Innere um den Weg dn, so verändern sich dabei die Coordinaten um dx, dy, dz, und es ist

$$\cos(n x) = \frac{dx}{dn}, \quad \cos(n y) = \frac{dy}{dn}, \quad \cos(n z) = \frac{dz}{dn}.$$

Setzt man dies in die runde Klammer von (74) ein, und berücksichtigt auch (74a), so erhält man

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn} = -\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right).$$

Nun brauchen wir nur ein gemeinsames Minuszeichen in allen drei Integralen fortzulassen, und das zweite Raumintegral mit entgegengesetztem Zeichen nach rechts zu werfen, dann finden wir die Schlufsformel:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{\partial V}{\partial z}\right\} dx\,dy\,dz \\ &\quad = -\overline{\iint} ds\, V\frac{\partial U}{\partial n} - \iiint V \Delta U\, dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Dieses ist der von GEORGE GREEN in seinem Essay vom Jahre 1828 aufgestellte Satz.

Wir sahen im Verlauf der Ableitung, dafs die beiden Functionen U und V verschiedenen Bedingungen genügen müssen, die sich nur zum Theil decken, nämlich soweit sie die ersten Differentialquotienten betreffen. Dem entsprechend kommen auch auf der rechten Seite der Gleichung beide Functionen in unsymmetrischer Weise vor. Die linke Seite dagegen ist vollkommen symmetrisch,

sie ändert sich nicht bei einer Vertauschung von U und V. Man kann daher mit gleichem Recht auch bilden:

$$\left.\begin{aligned}&\iiint\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz\\&=-\overline{\iint}ds\,U\frac{\partial V}{\partial n}-\iiint U\varDelta V\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}\right\}\quad(75\text{a})$$

wenn nur U außer den vorher nöthigen Bedingungen auch noch denen genügt, welche vorher von V gefordert wurden, und V ebenso noch den vorigen von U. Damit also die Gleichungen (75) und (75a) neben einander beide gültig sind, müssen U und V nebst ihren ersten Differentialquotienten im ganzen Integrationsraume eindeutig, endlich und stetig sein, während deren zweite Differentialquotienten namentlich das $\varDelta$ beider Functionen integrabel und eindeutig aber nicht nothwendig stetig sein muſs. Trifft dies alles zu oder hat man Punkte und Flächen, in denen das nicht der Fall ist, aus dem Raume herausgeschnitten durch Oberflächen, welche dann mit zur Begrenzung gehören, so kann man in den beiden Gleichungen die identische linke Seite als tertium comparationis ausschalten und findet durch Gleichsetzung der beiden rechten Seiten:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\iint}ds\,U\frac{\partial V}{\partial n}+\iiint U\varDelta V\,dx\,dy\,dz\\&=\overline{\iint}ds\,V\frac{\partial U}{\partial n}+\iiint V\varDelta U\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}\right\}\quad(75\text{b})$$

wofür man auch in anderer Anordnung schreiben kann:

$$\overline{\iint}ds\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)=-\iiint dx\,dy\,dz(U\varDelta V-V\varDelta U).\quad(75\text{c})$$

§ 22. Anwendungen des Green'schen Satzes auf die Potentialtheorie.

Die Nutzbarkeit des Green'schen Satzes in der Theorie der Kraftfelder hat ihren Grund darin, daſs man für die beiden Functionen U und V Potentialfunctionen einsetzen kann und dadurch Beziehungen zwischen Raum- und Oberflächenintegralen erhält, deren Integranden aus lauter physikalisch wichtigen Gröſsen bestehen.

So bedeuten die ersten Differentialquotienten, sowohl die nach x, y, z, welche in der linken Seite von (75) und (75a) vorkommen, wie auch diejenigen rechts nach der inneren Normale n der Oberfläche die gleichgerichteten Kraftcomponenten, und bei Kräften, welche nach dem COULOMB'schen Gesetze wirken, weiſs man auch die Bedeutung der in den Restintegralen vorkommenden ΔU und ΔV aus den Differentialgleichungen von LAPLACE und POISSON.

Die einfachste Gestalt nimmt dann der Satz an, wenn der Integrationsraum leer von den Ladungen ist, welchen die beiden Potentialfunctionen entspringen, wenn diese also auſserhalb liegen. Dann sind die Δ beider Functionen ohne Ausnahmestellen gleich Null, die Restintegrale fallen weg und die Gleichung (75b) geht über in eine Beziehung zwischen zwei Oberflächenintegralen

$$\overline{\iint} ds\, U \frac{\partial V}{\partial n} = \overline{\iint} ds\, V \frac{\partial U}{\partial n}. \qquad (76)$$

Dabei sind U und V Potentiale von zwei verschiedenen, einzeln vorhanden gedachten Vertheilungen auſserhalb der geschlossenen Oberfläche. Die Formel (76) kann wegen dieser Beschränkung immer nur in beschränkten Raumgebieten gültig sein, da doch die Potentialfunctionen von irgendwo liegenden Ladungen herrühren müssen. Dagegen ist es möglich, daſs diese Ladungen alle in endlichen Abständen von einander zusammenstehen, und zwar sowohl das System, welches U erzeugt, wie das andere, welches V erzeugt. Umschlieſst man dieses Raumgebiet durch eine Oberfläche, so ist der ganze äuſsere Raum leer und die Gleichung (76) ist deſshalb für ihn gültig. Da wir indessen den GREEN'schen Satz nur für ein umschlossenes Integrationsgebiet abgeleitet haben, so dürfen wir ihn nicht ohne Weiteres auf den grenzenlosen unendlichen Auſsenraum übertragen, sondern wir müssen eine äuſsere Umhüllung hinzudenken, und untersuchen, was aus den Ausdrücken wird, wenn wir diese Umhüllung weiter und weiter hinausschieben bis in unendliche Entfernung. Als geeignetste Begrenzungsform wählt man eine Kugelfläche von sehr groſsem Radius R, deren Mittelpunkt in der Nähe der vorhandenen elektrischen Ladungen liegt. Man weiſs nun, daſs in allen Regionen, welche sehr weit weg von dem geladenen Gebiete liegen, deren Abstand r vom Mittelpunkt also sehr groſs ist im Vergleich zu den endlichen Abständen der elektrischen Ladungen, daſs dort die Potentialfunctionen gegen Null streben proportional dem reciproken Werthe

des Abstandes, dafs man also in hinreichend grofsen Entfernungen setzen darf:

$$U = \frac{A}{r}, \qquad V = \frac{B}{r}. \tag{77}$$

Die Constanten A und B bezeichnen die algebraischen Summen der beiden Ladungssysteme. (Sollten diese oder eine von ihnen etwa gleich Null sein, so verschwinden die Ausdrücke proportional höheren Potenzen von $1/r$, dann gilt das Folgende a fortiori.)

Die ins Innere gerichteten Normalen zeigen an der grofsen Kugelfläche entgegengesetzt dem wachsenden Radius, daher ist an diesem Theil der Begrenzung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{A}{r^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{B}{r^2}. \tag{77a}$$

Die beiden in Gleichung (76), überhaupt im GREEN'schen Satz vorkommenden Oberflächenintegrale, nehmen also für Potentialfunctionen U und V, welche im Unendlichen reciprok r schwinden, erstreckt über eine sehr grofse Kugel den Werth an:

$$\iint ds\, U \frac{\partial V}{\partial n} = \iint ds\, V \frac{\partial U}{\partial n} = \iint ds \frac{AB}{r^3}.$$

Für r^3 ist der dem Kugelradius entsprechende Werth R^3 zu setzen, und die Flächenelemente ds können aus einer auf der Einheitskugel gedachten Eintheilung in Elemente $d\sigma$ gewonnen werden in der Form

$$ds = R^2 d\sigma.$$

Das Flächenintegral wird also:

$$= \iint R^2 d\sigma \frac{AB}{R^3} = 4\pi \frac{AB}{R}$$

oder wenn man $R = \infty$ werden läfst

$$= 0.$$

Damit ist bewiesen, dafs die Oberflächenintegrale in der Gleichung (76) über die unendliche Begrenzung des Raumes verschwinden, aber — wohl zu beachten — nur wenn beide Functionen im Unendlichen der Bedingungen (77) folgen. Dafs sie im ganzen Integrationsraume bis in unendliche Ferne der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen, reicht wohl für das Verschwinden der Raum-

integrale im GREEN'schen Satz aus, aber noch nicht für das Verschwinden dieses Oberflächenintegrales. Es giebt nämlich Functionen, welche der LAPLACE'schen Gleichung überall genügen, aber nicht als Potentiale von endlichen Vertheilungen gedeutet werden können, und defshalb auch die Bedingung (77) nicht erfüllen. Dahin gehört z. B. der Ansatz, dafs ein Potential im ganzen Raume gleich einer von Null verschiedenen Constante sein soll, oder gleich einer linearen Function der cartesischen Raumcoordinaten. Solche Functionen kann man bei den Anwendungen des GREEN'schen Satzes mit Nutzen verwenden, aber als Potential endlicher elektrischer Vertheilungen können sie immer nur in beschränkten Bezirken des Raumes, niemals aber im Unendlichen gedeutet werden.

Wir werden jetzt sogleich eine solche Anwendung des GREEN'schen Satzes machen, indem wir vorschreiben, die Function U solle im ganzen Raume den constanten Werth $U = 1$ besitzen, während $V = \varphi$ das Potential einer elektrischen Vertheilung sei. Die Gleichung (75) wird dann $0 = 0$, weil alle Differentialquotienten von U gleich Null sind, aber (75a, b, c) geben

$$\overline{\iint} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\iiint \Delta \varphi \cdot dx\, dy\, dz. \tag{78}$$

Diese wichtige Gleichung, welche wir hier als einen besonders einfachen Sonderfall des GREEN'schen Satzes gefunden haben, läfst sich auch, ohne die Kenntnifs der allgemeinen GREEN'schen Gleichung, direkt ableiten durch partielle Integration des Raumintegrals über $\Delta \varphi$, wobei im Verlauf der Umformung ganz dieselben Hülfsmittel benutzt werden, welche wir bei der Ableitung des GREEN'schen Satzes anwendeten. Diese Formel ist auch von GAUSS abgeleitet worden und unter dem Namen des GAUSS'schen Satzes bekannt. Wir wollen aus ihr nun Folgerungen ableiten. Wenn im ganzen Integrationsraume φ und dessen erste Differentialquotienten endlich und stetig sind, so ist das Oberflächenintegral links nur über die äufsere Begrenzung des abgeschlossenen Raumes zu erstrecken. Dies wollen wir zuerst als erfüllt ansehen. Dann können elektrische Ladungen im Inneren nur in endlicher räumlicher Dichtigkeit ε vorhanden sein (denn Flächenbelegungen würden die ersten Differentialquotienten von φ unstetig machen, geladene Linien und Punkte würden φ unendlich machen). Die POISSON'sche Differentialgleichung giebt $\Delta \varphi = -4\pi \varepsilon$; dies eingesetzt, liefert:

$$\overline{\iint} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 4\pi \iiint \varepsilon \cdot dx\, dy\, dz. \tag{78a}$$

Das Raumintegral stellt die Gesammtmenge der von der Oberfläche umschlossenen elektrischen Ladung dar.

Jetzt wollen wir außer den räumlichen Ladungen s im Innern gewisse Flächen gegeben denken, an denen die Differentialquotienten von φ springen, die also mit Elektricität von endlicher Flächendichte e belegt sein müssen. Diese Flächen stören die Gültigkeitsbedingungen unseres Satzes und müssen herausgeschnitten werden dadurch, daſs man ihre beiden Fronten mit unter die Grenzen des Integrationsbereichs aufnimmt. Der Raum, über welchen rechts integrirt wird, erfährt dadurch keinen Abbruch, aber zur linken Seite kommt ein neuer Betrag hinzu: Das Oberflächenintegral von $\partial\varphi/\partial n_i$ über beide Seiten der Unstetigkeitsflächen. Zertheilen wir diese Flächen in Elemente, die wir mit ds_u bezeichnen im Gegensatz zu den ds der äuſseren Umhüllung des Raumes, so können wir je zwei correspondirende Differentiale zusammenfassen. Die Richtungen der in's Innere des Raumes weisenden Normalen sind auf ihnen entgegengesetzt; unterscheiden wir sie als n_1 und n_2, so kann man den hinzukommenden Betrag als einfaches Flächenintegral darstellen

$$\overline{\iint}^{u} ds \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = \iint ds_u \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right). \tag{78b}$$

Die Unstetigkeitsflächen brauchen nicht geschlossen zu sein, können vielmehr in einem offenen Rand enden oder durch die äuſsere Begrenzung hindurchtreten in das hier nicht betrachtete Gebiet. Die etwa zur Zudeckung dieser Ränder nöthig gedachten unpaarigen Flächenelemente üben, wie leicht ersichtlich, keinen Einfluſs auf die Rechnung. Die in diesem neuen Integral vorkommende Klammer miſst nur nach Gleichung (56a) S. 60 für jedes ds_u den dort herrschenden Betrag von $-4\pi e$, der Beitrag zur linken Seite von (78a) ist daher

$$= -4\pi \iint ds_u \cdot e\,.$$

Lassen wir nun dem in Gleichung (78a) links stehenden Integral seine frühere Bedeutung, daſs es nur über die äuſsere Umhüllung, nicht aber auch über den Schutzmantel der inneren schädlichen Flächen erstreckt wird, so müssen wir den vorstehenden Betrag links zufügen, oder mit entgegengesetztem Vorzeichen rechts zufügen. Deſshalb geht (78a) über in

$$\overline{\iint} ds \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = 4\pi \iiint s\cdot dx\,dy\,dz + 4\pi \iint ds_u \cdot e\,. \tag{78c}$$

Der neu hinzugetretene Betrag der rechten Seite mifst bis auf den Factor 4π die Gesammtmenge der in Flächenladungen vorhandenen Elektricitäten, welche von der Oberfläche umgrenzt werden, über welche die linke Seite integrirt ist.

Schliefslich wollen wir auch noch ein System von punktförmigen Ladungen in den Integrationsraum hineinsetzen. Das Potential dieser allein ist, wie früher ausgeführt, gleich $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} \frac{e_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}$, bezeichnen wir also jetzt den übrigen Theil des Potentials, welcher von den Raumdichtigkeiten ε und den Flächendichtigkeiten e herrührt, und für welchen (78c) gilt, mit φ', so ist das gesammte Potential zu setzen:

$$\varphi = \varphi' + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} \frac{e_\mathfrak{a}}{r_\mathfrak{a}}.$$

Wollen wir auf dieses die Gleichung (78) anwenden, so müssen wir aufser den Flächen, in denen die Differentialquotienten von φ springen, auch noch alle die Punkte herausschneiden, in denen φ unendlich wird. Wir legen um jede Punktladung $e_\mathfrak{a}$ eine kleine Kugel vom Radius ϱ, und müssen das Oberflächenintegral links nun auch über diese Kugelflächen erstrecken; die in's Innere des Integrationsraumes gerichtete Normale zeigt aus den Kugeln heraus, liegt also in der Richtung des wachsenden Radius $r_\mathfrak{a}$. Nun sieht man ohne Weiteres, dafs die Beiträge aller Summanden von φ, welche an der Stelle einer kleinen Kugel endlich bleiben, mit verschwindendem Radius ϱ ebenfalls verschwinden. Das trifft in jedem Falle bei φ' zu, selbst, wenn ein Kugelcentrum auf einer Unstetigkeitsfläche liegt; ferner trifft es zu bei allen bis auf einen der Summanden $\mathfrak{a}$. Das Raumintegral wird bei verschwindendem ϱ nicht verändert, da die herausgeschnittenen Kugelräume verschwindend werden. Will man also den Beitrag finden, den die Oberfläche einer bestimmten der Kugeln $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ liefert, so braucht man statt des ganzen φ nur das Glied $\frac{e_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}}$ zu berücksichtigen.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{e_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}}\right) = \frac{\partial}{\partial r_\mathfrak{p}}\left(\frac{e_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}}\right) = -\frac{e_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}^2} = -\frac{e_\mathfrak{p}}{\varrho^2}.$$

An der Kugeloberfläche ist ja überall $r_\mathfrak{p} = \varrho$. Die Flächenelemente ds drücken wir durch diejenigen $d\sigma$ der Einheitskugel aus $ds = \varrho^2 d\sigma$. Dann ist

$$\iint_\mathfrak{p} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = \iint d\sigma \cdot \varrho^2 \left(-\frac{e_\mathfrak{p}}{\varrho^2}\right) = -4\pi e_\mathfrak{p},$$

der Beitrag behält also bei verschwindendem ϱ einen festen Werth, und ebenso die Beiträge der anderen Kugeln. Im Ganzen kommt also durch das Hinzutreten der Punktladungen zu dem Integral über die äufsere Begrenzung, welches in Gleichung (78c) links steht, hinzu die Summe

$$- 4\pi \sum_{a=1}^{n} e_a$$

oder wenn wir diese mit umgekehrtem Vorzeichen nach rechts werfen, geht die Gleichung (78c) über in die folgende

$$\overline{\iint} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 4\pi \iiint \varepsilon \cdot dx\,dy\,dz + 4\pi \iint ds_u \cdot e + 4\pi \sum_{a=1}^{n} e_a. \quad (78\text{d})$$

In allen Fällen also bestätigt sich das Gesetz, dafs das geschlossene Oberflächenintegral von $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ gleich ist 4π mal der Gesammtmenge der von der Oberfläche umschlossenen Elektricität, gleichgültig, ob diese in räumlicher Vertheilung oder als Flächenbelegung oder endlich als Punktladung vorhanden ist. Auch die Configuration der Ladungen ist gleichgültig, es wird unterschiedslos die Menge summirt, welche im Innern enthalten ist. Elektrische Ladungen aufserhalb des eingeschlossenen Raumes haben offenbar keinen Einflufs auf den Werth, obwohl doch der allgemeine Verlauf von φ und damit auch von $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ durch solche mitbestimmt wird.

Eine von der Existenz der Potentialfunction unabhängige Ableitung und Gestalt des in Gleichung (78) gegebenen Gauss'schen Satzes gewinnt man bereits direkt aus Gleichung (74), indem man dort $V = 1$ setzt und L, M, N mit den Componenten des elektrischen Feldes identificirt. Man findet dann:

$$-\overline{\iint} ds\, \mathfrak{E}_{n_i} = \iiint \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz, \quad (78\text{e})$$

aus welcher sich, analog den zu Gleichung (78d) führenden Betrachtungen mit Hülfe der Ausdrücke (69c und d am Schlufs des § 20) ergiebt:

$$-\overline{\iint} ds\, \mathfrak{E}_{n_i} = 4\pi \iiint \varepsilon \cdot dx\,dy\,dz + 4\pi \iint ds_u \cdot e + 4\pi \sum_{a=1}^{n} e_a. \quad (78\text{f})$$

§ 23. Folgerungen für das Potential in leeren Räumen.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt, daſs in ladungfreien Gebieten eines elektrischen Feldes für jede geschlossene Oberfläche das Integral über $\partial \varphi / \partial n_i$ verschwinden muſs:

$$\overline{\iint} d s \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0. \tag{79}$$

Die hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft des Potentials ist also die ausnahmelose Gültigkeit der LAPLACE'schen Differentialgleichung in dem umschlossenen Raume. Nun läſst sich zeigen, daſs auch umgekehrt aus unserem Integralsatz (79) die LAPLACE'sche Differentialgleichung als nothwendige Folgerung heraustritt. Wir brauchen als Raumgebiet nur ein Volumelement mit den Kanten dx, dy, dz zu wählen. Die Oberfläche besteht dann aus sechs rechteckigen Elementen. Zwei davon stehen senkrecht auf der x-Richtung und haben die Fläche $ds = dy\,dz$. Auf der einen ist $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, auf der gegenüberliegenden ist erstens das entgegengesetzte Vorzeichen dafür zu nehmen, zweitens aber kommt auch noch die differentiale Aenderung des Werthes hinzu, welche durch den Abstand dx von der vorigen Fläche bedingt wird. Dieser Zuwachs ist

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx.$$

Im Ganzen ist an der Gegenfläche zu setzen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx\right).$$

Beide Flächenelemente zusammen liefern zum Integral den Beitrag

$$dy\,dz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - dy\,dz \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx\right) = - dy\,dz \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx.$$

Analog liefern die beiden Flächen senkrecht auf y den Beitrag

$$= - dz\,dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy$$

und die beiden letzten senkrecht auf z den Beitrag:

$$= - dx\,dy \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz.$$

Die ganze sechsgliedrige Summe, welche zufolge unserem Satze verschwinden mufs, wird also

$$-\,dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0,$$

das fordert aber $\Delta\varphi = 0$.

Der Satz (79) und die LAPLACE'sche Differentialgleichung zeigen sich als zwei nur dem Ausdruck nach verschiedene Darstellungen derselben Eigenschaft der Potentialfunction φ. Während aber $\Delta\varphi$ ursprünglich auf ein cartesisches Coordinatensystem bezogen erscheint, ist das Flächenintegral von jeder solchen Beschränkung frei. Dies ist von Wichtigkeit, weil man dadurch in den Stand gesetzt ist, die LAPLACE'sche Gleichung direct in anderen Coordinatensystemen aufzusuchen, während die Transformation der zweiten Differentialquotienten mitunter weniger einfach auszuführen ist. Man braucht nur ein parallel epipedisches Volumelement zu nehmen, dessen Kanten den Differentialen der einzelnen Coordinaten entsprechen, und auf dessen Oberfläche den Satz (79) anzuwenden.

Eine directe Folgerung unseres Satzes ist diese: Eine Function, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt, kann in deren Gültigkeitsbereich weder Maximum noch Minimum haben. Würde nämlich an einer Stelle ein Maximum von φ bestehen, so müfste von dort aus φ nach allen Richtungen des Raumes hin abfallen. Umgiebt man den Gipfelpunkt mit einer kleinen geschlossenen Fläche, so müfste an dieser überall $\partial\varphi/\partial n_i > 0$ sein. Das Integral würde aus lauter positiven Summanden bestehen, könnte daher nicht den Werth Null besitzen. Ebenso ist die Möglichkeit eines Minimums ad absurdum zu führen. Das Vorkommen eines Sattelwerthes wird indessen nicht ausgeschlossen. Solche Stellen können sich auch thatsächlich im leeren Felde ausbilden; z. B. besitzt das von zwei gleichen Punktladungen erzeugte Feld im Mittelpunkt der Verbindungslinie einen Sattelwerth des Potentials.

Der GAUSS'sche Satz ermöglicht es uns nun, den inneren Zusammenhang der unabhängig von einander bewiesenen Gleichungen (69c) und (69d) aufzudecken. Flächenladung ist der Grenzfall sehr dichter Raumladung, durch einen Grenzprocefs mufs also die zweite aus der ersten hervorgehen.

Wir können auf Gleichung (78e) eine neue Definition der Divergenz $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}$ gründen, wenn man sie auf ein Volumelement $dx\,dy\,dz$ bezieht. Man findet

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{\overline{\iint ds\,\mathfrak{E}_n}}{dx\,dy\,dz}; \tag{79a}$$

das Flächenintegral mufs über die ganze Oberfläche von $dx\,dy\,dz$ erstreckt werden. Nun wählen wir das Coordinatensystem so, dafs an der zu untersuchenden Stelle einer Unstetigkeitsfläche die x-Richtung senkrecht zu dieser wird, und das Volumelement $dx\,dy\,dz$ so, dafs es von ihr halbirt wird. Ist es mit der Raumdichte s geladen, so ist

$$4\pi s = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{\iint ds\,\mathfrak{E}_n}{dx\,dy\,dz}.$$

Nun lassen wir dx immer kleiner werden. Es reducirt sich dann $\iint ds\,\mathfrak{E}_n$ auf den Ausdruck

$$dy\,dz\,(X_1 - X_2),$$

sodafs

$$X_1 - X_2 = 4\pi s\,dx$$

wird. Läfst man gleichzeitig s so wachsen, dafs $s\,dx$ dem Grenzwerth e zustrebt, so folgt die Gleichung

$$X_1 - X_2 = 4\pi e,$$

welche, abgesehen von der speciellen Lage des Coordinatensystems, mit (69d) identisch ist.

Man kann denselben Gedanken auch so formuliren. An einer Unstetigkeitsfläche wird die Divergenz

$$-\frac{\iint ds\,\mathfrak{E}_n}{dx\,dy\,dz} = \frac{X_1 - X_2}{dx}$$

unendlich grofs. Da dies stören würde, zieht man vor, in (79a) nicht durch das Volumelement, sondern nur durch das Flächenelement $dy\,dz$ zu dividiren. Der Ausdruck

$$-\frac{\iint ds\,\mathfrak{E}_n}{dy\,dz} = X_1 - X_2$$

stellt dann freilich nicht mehr die räumliche, sondern die sog. Flächendivergenz dar. Bei anderer Lage des Coordinatensystems nimmt diese den Werth $\mathfrak{E}_{n_1} + \mathfrak{E}_{n_2}$ an. Der Inhalt der Gleichungen (69c) und (69d) läfst sich also in die Aussage zusammenfassen: Die

Divergenz der elektrischen Feldstärke ist das 4π-fache der Dichte — wobei räumliche Divergenz und Raumdichte, Flächendivergenz und Flächendichte zusammengehören.

§ 24. Kraftröhren und Kraftfäden.

Wir fahren fort in der Betrachtung der für ladungfreie Räume gültigen Formel (79). Unter allen den mannigfaltigen Raumgebilden, über deren Begrenzungen man dieses Integral mit Nutzen zu erstrecken pflegt, spielen die sogenannten Kraftröhren eine wichtige Rolle für die Anschauung der Felder. Die Kraftlinien haben wir bereits früher in § 20 kennen gelernt und auch allgemeine Regeln über ihren Verlauf in Potentialfeldern gefunden, Regeln, welche sich hier sinngemäfs übertragen lassen werden. Zunächst bilden wir uns den Begriff dieser Gebilde. Wir denken uns im leeren Raume ein abgegrenztes Flächenstück (etwa auf einer Aequipotentialfläche, doch ist das nicht nothwendig) und richten unsere Aufmerksamkeit auf die durch sämmtliche Punkte der Randcurve laufenden Kraftlinien. Das Continuum aller dieser Linien umhüllt wegen ihres charakteristischen Verlaufs ein röhrenförmiges Raumgebilde, welches wir eine Kraftröhre nennen. Im Inneren des dadurch geformten Kanals verläuft ein Strang von Kraftlinien; diese können weder durch die Wandung austreten noch eintreten, denn Kraftlinien schneiden sich nicht; sie verlaufen um so ähnlicher, je näher sie benachbart liegen. Sie können in elektrostatischen Feldern auch nicht spiralig gedrillt verlaufen, wie etwa die Fasern im Garn, denn sie sind die orthogonalen Trajectorien einer Niveauflächenschaar. Ringförmig geschlossene Kraftröhren können nur in den mehrfach zusammenhängenden elektromagnetischen Potentialfeldern vorkommen. Hierfür wie für die Erscheinungen bei Doppelschichten gelten dieselben Betrachtungen, wie für die erzeugenden Kraftlinien.

Nun schneiden wir durch zwei beliebige Endflächen ein Stück einer solchen Kraftröhre heraus und wenden auf dessen Oberfläche unseren Satz an.

Die zur Röhrenwandung gehörigen Flächenelemente liefern keinen Beitrag zu dem Integrale, weil auf jedem einzelnen $\partial\varphi/\partial n_i = 0$ ist. Nämlich $\partial\varphi/\partial n$ mifst die in Richtung der Normale fallende Componente der elektrischen Kraft; da aber die Kraftresultante dort tangential verläuft, so ist die darauf senkrechte Componente $= 0$. Es bleiben nur die Beiträge der beiden Endflächen übrig und der Satz nimmt die Form an:

$$\iint_1 ds_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right)_1 + \iint_2 ds_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right)_2 = 0\,. \tag{80}$$

Die Indices 1 und 2 sollen bedeuten, daſs sich die beiden Theilintegrale nur über die mit 1 und 2 numerirten offenen Schnittflächen der Röhre erstrecken sollen. Wechseln wir nun an einer der beiden Flächen die Richtung der Normalen, so daſs diese nun aus dem Röhrenabschnitt hinauszeigt, so kehrt sich das Vorzeichen des zugehörigen Integrales um. Dieser Normalenwechsel hat den Zweck auf beiden Schnittflächen die gleiche Beziehung zwischen Kraft und Normale herzustellen. Wir wollen jetzt diejenige Normalenrichtung auf beiden Schnittflächen annehmen, welche einen spitzen Winkel mit der Kraftrichtung bildet. (Stellenweise Ausnahme nur, wenn die Schnittfläche Falten aufweist.) Diese Richtung bezeichnen wir jetzt mit n ohne Index. Die Gleichung (80) geht dann über in

$$\iint_1 ds_1 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = \iint_2 ds_2 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right). \tag{80a}$$

Da die Flächen 1 und 2 ganz beliebig geführt sind, so folgt hieraus, daſs für jede Schnittfläche, wo und wie man sie auch durch dieselbe Kraftröhre legt, das vorstehende Integral den gleichen Werth besitzt:

$$\iint ds \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) = S\,. \tag{80b}$$

Nach unserer Festsetzung über die Normale ist $\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$ positiv, also S desgleichen. Wir nennen diese Constante die „Stärke der Kraftröhre". Man kann sie auch ohne Einführung der Potentialfunction φ ausdrücken, indem man die resultirende Kraft $\mathfrak{E}$ benutzt und setzt:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{E} \cos(n, \mathfrak{E})\,.$$

Dann ist

$$S = \iint ds\, \mathfrak{E} \cos(n, \mathfrak{E})\,. \tag{80c}$$

Dieser Ausdruck ist insofern umfassender, als die Voraussetzungen aus denen er abgeleitet wurde, weil in ihm $\mathfrak{E}$ nicht nothwendig Gefälle einer Potentialfunction sein muſs. Doch muſs dann an Stelle der LAPLACE'schen Differentialgleichung eine andere Aus-

drucksform dafür eintreten, daſs der Raum frei von Ladung ist: Die allgemeinste Bedingung dafür ist nach § 20 die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Den einfachsten Ausdruck nehmen die vorstehenden Gleichungen für S an, wenn man die Querschnitte überall normal auf den Kraftlinien wählt, d. h. als Ausschnitte von Aequipotentialflächen. Dann wird direct $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathfrak{E}$; die Flächenelemente in diesen Querschnitten seien dq, wir erhalten dann

$$S = \iint dq \cdot \mathfrak{E}. \tag{80d}$$

Man kann eine Kraftröhre immer zerlegen in ein Bündel dünnerer Kraftröhren, deren Stärken sich summiren zur Stärke der ganzen Röhre. So gelangt man zur Vorstellung von Kraftröhren, welche so dünn sind, daſs erstens deren normale Querschnitte q als eben gelten dürfen, und daſs zweitens die Intensität $\mathfrak{E}$ der Kraft über den ganzen Querschnitt als gleich groſs angenommen werden kann. Solche Elementar-Röhren wollen wir **Kraftfäden** nennen. Die beiden Bedingungen, die wir an sie stellen, werden gemeinhin vom gleichen Grad der Dünnigkeit an zugleich erfüllt, doch giebt es besondere Fälle, in denen die eine Bedingung viel weitere Grenzen zuläſst als die andere. Bilden z. B. die Niveauflächen concentrische Kugelschalen, so ist $\mathfrak{E}$ über beliebig groſse, gekrümmte Theile jeder Kugelfläche constant. Sind andererseits die Kraftlinien so stark gekrümmt, daſs die Krümmungskreise von gleicher Gröſsenordnung werden mit Röhren-Querschnitten, welche bereits als eben gelten dürfen, so hat die Kraft an verschiedenen Stellen noch merklich verschiedene Werthe. Bei parallelen und ebenen Niveauflächen endlich sind **beide** Bedingungen in unbeschränkter Ausdehnung erfüllt, an solchen Stellen können Kraftfäden beliebig dick werden. Im Allgemeinen werden wir aber annehmen müssen, daſs die Querschnitte q kleine Flächen sind. Die Stärke eines Kraftfadens wird deſshalb trotz der endlichen Kraft einen kleinen Werth haben, den wir mit δS bezeichnen wollen. Die Gleichung (80d) geht für einen Kraftfaden in die einfachere über:

$$q \cdot \mathfrak{E} = \delta S. \tag{81}$$

In einem Kraftfaden ist das Product aus Kraft und Querschnitt constant, oder die Kraft an verschiedenen Stellen des Fadens ist dem Querschnitt umgekehrt proportional.

Man kann sich den ganzen leeren Raum eines elektrischen Feldes zerlegt denken in Kraftfäden von der gleichen Stärke δS und gewinnt dadurch eine sehr anschauliche Darstellung der Vertheilung der Kraft. Die Richtung ist überall aus dem Lauf der Fäden direct erkennbar und die Intensität ist nun nicht nur längs eines und desselben Fadens, sondern überall reciprok dem an derselben Stelle befindlichen Querschnitt q. Kennt man das absolute Maafs der gewählten Stärke δS, so kann man aus der Gröfse des Querschnittes die Kraftintensität im absoluten Maafse finden nach der Formel

$$\mathfrak{E} = \frac{\delta S}{q}. \tag{81a}$$

Wir hatten früher ein anderes Anschauungsmittel gefunden, welches dieselben Dienste leistete. Wir legten durch das Feld eine Schaar von Aequipotentialflächen, bei denen der Werth von φ zwischen allen Nachbarflächen die gleiche Differenz $\delta\varphi$ zeigte. Dann gab der Normalabstand h zweier Nachbarflächen die Richtung der Kraft, und die Länge h war im ganzen Felde reciprok der Kraft nach der Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \frac{\delta\varphi}{h}. \tag{81b}$$

Bei dieser Vorstellung erhielt der Feldraum gewissermaafsen eine blättrige Structur, während die neugefundene Vorstellung der Kraftfäden ihn von faseriger Structur erscheinen läfst. Beide Structuren stehen senkrecht auf einander.

Stellen wir uns einmal beide Anschauungen zugleich vor, so wird der Raum in lauter kleine prismatische Zellen zerschnitten, deren Volumina gleich $q \cdot h$ sind und an Gröfse je nach q und h von Ort zu Ort wechseln. Aus Gleichungen (81a) und (81b) folgt durch Multiplication

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{\delta S \cdot \delta\varphi}{q \cdot h}. \tag{81c}$$

Hierin liegt wegen des festen Zählers der rechten Seite der Satz, dafs das Quadrat der elektrischen Kraft überall reciprok dem Volumen der prismatischen Zellen ist. Dieser Satz ist insofern bedeutungsvoll, als die elektrische Energie, welche nach der MAXWELL-schen Theorie im Felde ihren Sitz hat, in ihrer räumlichen Dichtigkeit dem Quadrate der elektrischen Kraft proportional ist (mit dem Factor $1/8\pi$), dafs also die gedachten Zellen Raumelemente von

gleichem Inhalt an elektrischer Energie liefern. Der absolute Betrag dieses Energieinhalts ist:

$$\delta E = \frac{\delta S \cdot \delta \varphi}{8\pi} \tag{81d}$$

und den Energieinhalt gröfserer Räume würde man durch Abzählen der ihn füllenden Zellen finden.

Die beiden Anschauungsmittel: Niveauschalen und Kraftfäden finden also im leeren Potentialfelde ein gemeinschaftliches Verwendungsgebiet und leisten dort gleich gute Dienste. Indessen reichen beide nach verschiedenen Seiten über dieses gemeinsame Gebiet hinaus. Die Vorstellung von den Kraftfäden von constanter Stärke erfordert nicht die Existenz eines Potentials, und kann defshalb auch in Wirbelfeldern verwendet werden, sofern diese nur frei von Ladungen sind. Die Niveauschalen von constanter Potentialdifferenz andererseits erfordern nicht einen ladungsfreien Raum, man kann sie, wie wir schon früher betrachteten, auch durch geladene Gebiete verfolgen, wenn nur ein Potential existirt. Man kann zwar Kraftlinien sehr wohl in beladenes Gebiet hinein verfolgen, ja bei ausschliefslich räumlichen Dichtigkeiten bleiben sie sogar durch das ganze geladene Gebiet hindurch stetig. Man kann defshalb dort auch Kraftfäden und Kraftröhren nach derselben Vorschrift bilden; aber das Product $\mathfrak{E} \cdot q$ ist dann nicht constant, weil das geschlossene Oberflächenintegral der Normalcomponente der Kraft dort nicht gleich Null ist. Läuft eine Kraftröhre durch positiv geladenes Gebiet, so nimmt ihre Stärke dabei zu und zwar zwischen zwei Schnittflächen um so viel, als die zwischen ihnen eingeschlossene Ladung nach Multiplication mit 4π beträgt. Durchläuft die Kraftröhre negativ geladenes Gebiet, so nimmt ihre Stärke um entsprechende Beträge ab. Diese Abnahme kann so weit gehen, dafs die Stärke unter Null zu negativen Werthen sinkt, d. h. dafs die Kraft in der Röhre ihre Richtung umkehrt, so dafs man nicht eigentlich von einem Fortlaufen der Röhre sprechen kann. Durchsetzt eine Röhre eine positiv geladene Fläche, so tritt der Zuwachs ihrer Stärke sprungweise ein und beträgt 4π mal die in die Röhre hineinfallende Flächenbelegung. Um einen geladenen Punkt herum drängen sich Kraftröhren bis zu verschwindendem Querschnitt zusammen, die Intensität der Kraft wird dafür unendlich. Indessen ist, wie schon öfters erwähnt, eine punktförmige Ladung nur eine mathematische Fiction. Man mufs immer einen, wenn auch kleinen, Raum um einen solchen Punkt herum von der Betrachtung ausschliefsen, von dessen

innerer Beschaffenheit man nichts weifs aufser dem Quantum der darin enthaltenen Elektricität.

Da nun die Kraftröhren und -fäden ihre Bedeutung verlieren, sobald ihre Stärke nicht mehr constant ist, so schliefst man zweckmäfsig alle geladenen Gebilde: Raumgebiete, Flächen, Linien und Punkte von der Zerlegung in Kraftfäden aus und kann dann allgemein aussagen: Aus Gebilden mit überwiegend positiven Ladungen entspringen Kraftfäden, d. h. es treten durch eine bereits im leeren Raume liegende Umhüllungsfläche eines solchen Gebildes mehr Kraftfäden heraus als hinein. In Gebilden mit überwiegend negativen Ladungen aber münden Kraftfäden, d. h. es laufen mehr hinein, als herauskommen. Im leeren Raume kann ein Kraftfaden nirgends Anfang oder Ende haben. Man kann defshalb bestimmt wissen, dafs Kraftfäden von positiven Ladungen aus entweder nach negativen Ladungen laufen oder sich im Unendlichen verlieren, auch können sie, aus dem Unendlichen kommend, in negativen Gebieten enden. (Nicht unter diese Regel passen die ringförmig geschlossenen Kraftfäden in elektromagnetischen Feldern, man könnte sie höchstens dadurch mit hineinziehen, dafs man diese Felder vermittelst einer fingirten Doppelschicht als statische Felder auffafst. Dann entspringen die Fäden auf der positiven Belegung und münden auf der negativen, sind also nicht mehr geschlossen.)

Hat man die gemeinschaftliche Stärke δS aller Kraftfäden im leeren Felde festgesetzt, so kann man auch eine einfache Maafsbeziehung zwischen einer Elektricitätsmenge und der Zahl der von ihr ausgehenden Kraftfäden angeben. Dazu dient uns die Gleichung (78d). Bezeichnen wir die von der geschlossenen Oberfläche umhüllte Gesammtladung, ohne Unterschied, in welcher Art der Vertheilung sie vorhanden ist, mit $\mathfrak{e}$, so heifst jener Satz:

$$\overline{\iint} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 4 \pi \mathfrak{e}.$$

Als Oberflächenelemente ds können wir die Schnitte der austretenden und eintretenden Kraftfäden benützen; dann ist jedes Differential von dem Werthe $\pm \delta S$ und das ganze Flächenintegral erscheint in der Form $N \cdot \delta S$. Dabei ist N der Ueberschufs in der Anzahl der positiven Differentiale über die negativen. Diese Zahl kann positiv oder negativ ausfallen, man darf sie als ganze Zahl ansehen, wenn δS so klein ist, dafs es auf Bruchtheile davon nicht mehr ankommt. Nunmehr lautet die vorstehende Gleichung

$$N \cdot \delta S = 4 \pi \mathfrak{e}$$

oder

$$N = \frac{4\pi e}{\delta S}.$$

Die Anzahl N der von der Elektricitätsmenge $+e$ ausgehenden Kraftfäden von der Stärke δS ist durch die vorstehende Formel angegeben, und eben so grofs ist die Anzahl der Kraftfäden, welche in einer negativen Elektricitätsmenge $-e$ ihr Ende finden.

Die Fadenstärke δS ist ihrer Dimension nach einer Elektricitätsmenge gleich, und wird defshalb nach demselben absoluten Maafs gemessen. Nun sahen wir früher, dafs im elektrostatischen C. G. S.-System die Einheit der Ladung ein sehr unbedeutendes Quantum repräsentirt, so dafs Ladungen e mit gut wahrnehmbaren sinnlichen Wirkungen immer durch sehr grofse Maafszahlen bezeichnet sind. Defshalb führt die Annahme $\delta S = 1$ fast immer zu hinreichend schwachen Kraftfäden, für welche alle Vereinfachungen des Unendlich-Kleinen unbedenklich erfüllt sind. Für solche Einheitsfäden gilt dann die Formel

$$N = 4\pi e. \tag{82a}$$

Die elektrische Ladung $+e$ sendet $4\pi e$ Einheitsfäden aus. Man kann auch sagen: Von jeder Einheit positiver Elektricität gehen 4π Einheitsfäden aus, in jeder negativen Elektricitätseinheit enden 4π Einheitsfäden. Man findet diese metrische Beziehung oft so ausgesprochen, dafs an Stelle des Wortes „Einheitsfäden“ kurz „Kraftlinien“ gesetzt wird. Dann kann man aber unter Kraftlinien nicht den von uns eingeführten allgemeinen Begriff verstehen, weil dabei von einer bestimmten Anzahl nicht die Rede sein kann, sondern man mufs sich vorstellen, dafs jede Einheitsröhre oder jeder Einheitsfaden eine ausgesuchte Kraftlinie, gewissermaafsen eine Seele in sich schliefst, welche dann als Vertreter des ganzen Fadens gesetzt wird, und in diesem besonderen Sinn eine Kraftlinie genannt wird. In dieser Bedeutung ist die Bezeichnung „Zahl der Kraftlinien“ bei Faraday, Maxwell und Anderen zu verstehen.

§ 25. Der Green'sche Satz über zwei einander gleiche Functionen erstreckt.

Der Green'sche Satz handelt von zwei Raumfunctionen, die wir U und V nannten. Wir haben aus ihm einen specielleren Satz über nur eine Raumfunction hergeleitet, indem wir die andere Function

als Constante (= 1) festsetzten. Man kann noch einen anderen Satz ebenfalls über nur eine Function aus dem allgemeinen GREEN'schen Satz herauslesen, indem man nämlich die beiden Functionen identificirt. Das wollen wir jetzt thun, und zwar sogleich annehmen, die Function sei das Potential φ irgend einer elektrischen Vertheilung. Wir setzen in Gleichung (75) oder (75a)

$$U = V = \varphi$$

und finden:

$$\left.\begin{aligned}\iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz \\ = -\overline{\iint} ds\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}-\iiint\varphi\,\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\quad(83)$$

Von dieser Gleichung wollen wir nun einige Anwendungen machen.

1. Das Potential φ rühre her von einer nur im endlichen Raume begrenzten Elektricitätsvertheilung, die wir uns der Einfachheit wegen zunächst nur in räumlicher Dichtigkeit ε vorhanden denken. Das Integrationsgebiet sei der ganze unendliche Raum, seine Begrenzung also eine unendlich ferne Kugelfläche. Dann wird, wie wir schon im Gefolge der Gleichungen (77) nachgewiesen haben, das Oberflächenintegral rechts gleich Null. Im Raumintegral rechts ist nach der POISSON'schen Differentialgleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon$ zu setzen. Wir erhalten also die Relation

$$\left.\begin{aligned}\iiint^{\infty}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz \\ = 4\pi\iiint\varphi\cdot\varepsilon\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\quad(84)$$

Der Form nach sind beide Raumintegrale über den ganzen Raum erstreckt, dem Inhalt nach aber liefert das rechtsstehende nur dort Beiträge, wo die Dichtigkeit ε von Null verschieden ist, also in einem beschränkten Gebiet, während das links stehende Integral auch im leeren Raume bis in grofse Entfernungen hinein Beiträge empfängt. Wie man leicht sieht, ist der Integrandus der linken Seite nichts anderes, als das Quadrat der elektrischen Kraft $= \mathfrak{E}^2$. Das ganze Integral links stellt also nach Division durch 8π den im vorigen Paragraphen bereits herangezogenen MAXWELL'schen Ausdruck für die gesammte elektrische Energie des Feldes dar:

$$\frac{1}{8\pi}\iiint\limits^{\infty} \mathfrak{E}^2\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}\iiint \varphi \cdot \varepsilon\, dx\, dy\, dz. \tag{84a}$$

Wir können das leicht in Verbindung bringen mit unserem früher gegebenen Ausdruck der potentiellen Energie eines Ladungssystems. Nämlich das Potential φ selbst kann als Raumintegral dargestellt werden über alle Volumelemente $dx'\, dy'\, dz'$, in welchen Dichtigkeit ε' existirt

$$\varphi = \iiint \frac{\varepsilon'\, dx'\, dy'\, dz'}{r}.$$

Dabei ist r der Abstand des Elementes $dx\, dy\, dz$ von dem Element $dx'\, dy'\, dz'$. Ob man dabei die Stelle $r = 0$ ausschließt oder nicht, macht nichts aus. Die vorstehende Gleichung geht nun über in

$$\frac{1}{8\pi}\iiint\limits^{\infty} \mathfrak{E}^2\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}\iiiint\!\!\iint \frac{(\varepsilon\, dx\, dy\, dz)(\varepsilon'\, dx'\, dy'\, dz')}{r}. \tag{84b}$$

Die rechte Seite deckt sich jetzt mit dem Ausdruck Gleichung (17) für die potentielle Energie, nur hatten wir damals eine Doppelsumme über diskrete Punktladungen, hier ein doppeltes Raumintegral über continuirliche Raumladungen.

Dieser interessante Inhalt der Gleichung (83) verändert sich nicht wesentlich, wenn wir auch noch geladene Flächen im endlichen Raume dazu nehmen, an denen die Differentialquotienten von φ springen. Dann ist das Oberflächenintegral rechts zwar über die unendlich ferne Kugel gleich Null; es kommen aber dazu die beiden Seiten der Unstetigkeitsflächen und liefern, ganz ähnlich wie wir früher schon einmal sahen, Beiträge von der Form

$$= -\iint ds_u \cdot \varphi \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right) = 4\pi \iint ds_u \cdot \varphi \cdot e.$$

In jedem Falle setzt sich die rechte Seite zusammen aus allen Ladungen, jede multiplicirt mit dem Potentialwerth, der an ihrem Orte herrscht, gleichviel, ob es Raum- oder Flächenladungen sind. Es ließe sich auch zeigen, daß für Punktladungen das Nämliche gilt. Man würde dazu nach bekannter Methode die Punkte durch Kugeln herausschneiden und die Oberflächenintegrale über diese Kugeln für verschwindenden Radius berechnen. Dann kommt zur rechten Seite hinzu

$$4\pi \sum_a \varphi_a \cdot \mathfrak{e}_a.$$

Hieraus geht hervor, dafs die gesammte Energie des elektrostatischen Feldes stets positiv ist, worauf wir schon in § 9 hinwiesen.

2. Die zweite Anwendung der Gleichung (83) soll sich auf ein durchaus ladungsfreies Raumgebiet beschränken, in welchem also φ sicherlich endlich und stetig verläuft und ohne Ausnahmepunkte der LAPLACE'schen Differentialgleichung $\Delta\,\varphi$ genügt. Dann verschwindet das Raumintegral auf der rechten Seite und das Oberflächenintegral erstreckt sich nur über die eigentliche Begrenzung, nicht etwa noch über innere Unstetigkeitsflächen. Ferner wollen wir die ganz besondere Voraussetzung machen, dafs das Potential auf der ganzen Begrenzungsfläche einen constanten Werth $\bar{\varphi}$ besitze, welchen wir als gemeinsamen Factor vor das Integral setzen dürfen, so dafs unsere Gleichung nun lautet:

$$\iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz=-\,\bar{\varphi}\cdot\overline{\iint} ds\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\cdot \qquad (85)$$

Von dem nun noch übrig gebliebenen geschlossenen Flächenintegral wissen wir aber nach Gleichung (78), dafs es ebenfalls gleich Null sein mufs. Unsere Voraussetzungen fordern also:

$$\iiint\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz=0. \qquad (85\text{a})$$

Wegen des quadratischen Integrandus ist es nun unmöglich, dafs der vorstehende Ausdruck etwa durch gegenseitige Vernichtung positiver und negativer Bestandtheile schliefslich in Summa Null geben sollte; es ist dadurch bestimmt ausgesagt, dafs an jeder Stelle im ganzen Gebiet bis an die Begrenzung heran

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

sein mufs. Das Potential besitzt nirgends ein Gefälle, mufs also den constanten Werth $\bar{\varphi}$, welcher an der Oberfläche herrscht, auch im ganzen Innenraum wahren. Eine elektrische Kraft existirt daher in dem Gebiete nicht.

Die Voraussetzungen dieser mathematischen Schlüsse lassen sich experimentell verwirklichen. Wir nehmen eine Kenntnifs vorweg, die wir später ausführlicher begründen werden, dafs nämlich in Leitern der Elektricität, z. B. in metallischen Körpern, im Zustand

elektrostatischen Gleichgewichts überall constantes Potential herrscht, so weit dieselben leitend mit einander verbunden sind. Von der Möglichkeit, dafs an der Berührungsfläche heterogener Metalle oder anderer Leiter Potentialsprünge (Doppelschichten) vorkommen, brauchen wir hier nicht Notiz zu nehmen, weil diese bei elektrostatischen Problemen gar keine Rolle spielen. Der Versuch ist nun folgender: Man stellt einen beliebigen, elektrisch geladenen Körper „isolirt" auf, so dafs dessen Ladung nicht entweichen kann. Die davon ausgehende elektrische Kraft kann man im leeren Raume des Experimentirzimmers bis in weite Entfernungen nachweisen. Dann umgiebt man den Körper mit einer geschlossenen metallischen Hülle, welche ihn aber nicht leitend berühren soll. Die Wände des Zimmers, aus welchem alle sonstigen elektrischen Ladungen entfernt werden müssen, denken wir uns ebenfalls leitend, etwa mit Blech ausgekleidet, und verbinden sie mit der Hülle durch einen Metalldraht. Der Raum dieses Zimmers erfüllt dann alle Bedingungen, welche wir in der Theorie vorausgesetzt haben. Seine Begrenzung setzt sich zusammen aus der Aufsenseite der Metallhülle, den metallischen Wänden und der Oberfläche des beide verbindenden Drahtes, also aus lauter zusammenhängenden Leitern, in denen das Potential einen überall gleichen Werth annehmen mufs. Aufserdem ist der Raum frei von Ladungen, denn das Innere der Hülle gehört nicht mit zu unserem abgeschlossenen Integrationsgebiet. Der Theorie nach herrscht also keine elektrische Kraft im Raume, und diese Folgerung wird durch die Erfahrung vollkommen bestätigt: Selbst mit den empfindlichsten Elektrometern kann man keine Spur von einer Potentialdifferenz, d. h. von elektrischer Kraft im Raume nachweisen, mag die eingekapselte Ladung noch so stark sein und der Abstand von der Hülle noch so klein.

Diese Bestätigung ist ein Beweis dafür, dafs unter allen Abstofsungs- und Anziehungsgesetzen das Coulomb'sche das einzig mögliche ist. Es läfst sich nämlich zeigen, dafs die Abnahme der Kraft mit dem reciproken Quadrat des Abstandes das einzige Kraftgesetz ist, bei welchem die zugehörige Potentialfunction der Bedingung $\Delta\varphi = 0$ im leeren Raume genügt. Sobald die Function von r im Kraftgesetz auch nur um ein ganz Geringes verschieden wäre von der minus-zweiten Potenz, so wäre $\Delta\varphi$ im leeren Raume nicht genau gleich Null, das Raumintegral über das Quadrat der elektrischen Kraft würde nicht wie in (85a) exact verschwinden, und die kleinsten Spuren von elektrischer Kraft würden sich bei den sehr empfindlichen Elektrometermessungen verrathen. Defshalb haben wir hier

einen ungleich strengeren Beweis des COULOMB'schen Gesetzes, als die directen Messungen an der Drehwaage zu bieten vermögen. Bei der praktischen Ausführung dieses Versuches ist übrigens die metallische Auskleidung des Zimmers meist entbehrlich. Es genügt die Hülle um die Ladung in leitende Verbindung mit der Erde zu bringen, denn die Mauern eines Gebäudes sind doch gewöhnlich so weit leitend, daſs auch sie sich auf dem Potential der Erde befinden. Unter freiem Himmel kann man gewöhnlich auch das Potential der Erde als gültig annehmen, soweit man von der atmosphärischen Elektricität absehen darf.

Als ein mitunter wichtiges Hülfsmittel wollen wir noch anführen, daſs sich ein Raumgebiet, in welchem keine Ladungen vorhanden sind, von jeder äuſseren Feldwirkung abschlieſsen läſst, indem man es mit einer metallischen Hülle umschlieſst. Man braucht dazu in der Praxis nicht einmal lückenlose Flächen (Blechumhüllung) herzustellen, sondern Drahtnetze leisten bereits den gleichen Dienst.

§ 26. Auswerthung einer Potentialfunction in einem begrenzten Raumgebiet mit Hülfe des Green'schen Satzes.

Wir kommen nun zu einer Anwendung des GREEN'schen Satzes, bei welcher beide Functionen U und V mit verschiedener Bedeutung gebraucht werden. Die Function φ sei das Potential einer elektrischen Vertheilung, deren räumliche Dichtigkeit ε im Inneren eines begrenzten Raumgebietes uns bekannt ist. Zunächst wollen wir annehmen, daſs Unstetigkeitsflächen (Flächenbelegungen) und Unendlichkeitspunkte (Punktladungen) in diesem Gebiete nicht vorkommen. Wohl aber kann das Potential auch noch bedingt sein durch irgend welche Ladungen, welche auſserhalb des begrenzten Gebietes liegen. Wir wollen den Werth von φ in irgend einem inneren Punkte des Raumes mit den Coordinaten a, b, c, ausdrücken. Zu dem Zweck bilden wir den GREEN'schen Satz über das Raumgebiet, in welchem ε bekannt ist. Für die Function V setzen wir das Potential φ, für U setzen wir eine Hülfsfunction, welche dem einfachsten Typus einer Potentialfunction nachgebildet ist:

$$U = \frac{1}{r}, \tag{86}$$

wo r den Abstand eines beliebigen Raumpunktes von dem festen Punkt (a, b, c) bedeutet

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \tag{86a}$$

Diese Hülfsfunction genügt der LAPLACE'schen Differentialgleichung, hat aber im Punkte (a, b, c) eine Unendlichkeitsstelle, welche wir durch eine kleine Kugel vom Radius ϱ aus dem Raume herausschneiden müssen, über welchen wir den GREEN'schen Satz erstrecken wollen. Da beide Functionen den gleichen Bedingungen der Potentialfunctionen genügen, so können wir den Satz in der Form (75b) verwenden.

Die Oberfläche besteht aus der äufseren Begrenzung und der kleinen Kugelfläche. Wir wollen aber das in jener Formel gebrauchte Zeichen $\overline{\iint}$ hier auf die äufsere Begrenzung beschränken und die von der Kugelfläche links und rechts herrührenden Beiträge gesondert hinzufügen. Wir setzen dabei, wie schon früher, $ds = \varrho^2 d\sigma$ und $dn_i = + dr$ und bezeichnen die Integration über alle $d\sigma$ (deren Summe $= 4\pi$ ist) mit $\iint^{(k)}$. Dann nimmt für unseren Fall der GREEN'sche Satz die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\iint} ds \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \iint^{(k)} \varrho^2 d\sigma \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \iiint \frac{1}{r} \Delta \varphi \, dx\, dy\, dz \\ = &\overline{\iint} ds\, \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_i} + \iint^{(k)} \varrho^2 ds\, \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} + \iiint \varphi\, \Delta \left(\frac{1}{r}\right) dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Absichtlich ist in dieser Gleichung noch keine der naheliegenden Umformungen ausgeführt, um ihre Entstehung deutlich zu zeigen. Bezeichnen wir der Kürze wegen die sechs Integrale in der Reihenfolge, wie sie in Gleichung (87) folgen, mit I, II, III, IV, V, VI. Mit I und IV sind keine Aenderungen vorzunehmen, wohl aber mit den beiden Kugelflächenintegralen. Das linke ist

$$\text{II} = \varrho \cdot \iint^{(k)} d\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

und verschwindet wegen des Factors ϱ mit diesem; ja sogar noch entschiedener als ϱ selbst, denn da φ an der Stelle (a, b, c) einen regulären Verlauf hat, sind die einzelnen $\partial \varphi / \partial r$ nicht nur endlich, sondern auf den beiden Hälften der kleinen Kugel nahezu entgegengesetzt gleich, so dafs sie sich bei verschwindender Gröfse der Kugel auch noch gegenseitig aufheben. Jedenfalls ist im Grenzfall $\varrho = 0$

$$\text{II} = 0.$$

Anders ist es bei dem rechtsseitigen Integral V.

Es ist

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2},$$

wofür an der Kugelfläche der feste Werth $-\frac{1}{\varrho^2}$ zu setzen ist. Die positiven und negativen Potenzen von ϱ heben sich hier auf und es bleibt:

$$V = -\iint^{(k)} d\sigma \cdot \varphi .$$

Die Werthe, welche φ auf den einzelnen Stellen der kleinen Kugelfläche besitzt, nähern sich mit verschwindendem Radius mehr und mehr dem Werthe, welcher im Centrum (a, b, c) herrscht. Ja man darf diesen als zulässigen Mittelwerth bereits vor das Integral setzen, ehe noch die Kugel ganz verschwunden ist. Das dann noch übrigbleibende $\iint^{(k)} d\sigma$ ist aber $= 4\pi$, mithin wird

$$V = -4\pi\,\varphi_{(a,\,b,\,c)} .$$

Im linksseitigen Raumintegral III machen wir Gebrauch von der Poisson'schen Differentialgleichung, deren ε uns ja im ganzen Gebiet bekannt ist, und erhalten:

$$\text{III} = -4\pi \iiint \frac{\varepsilon\, dx\, dy\, dz}{r} .$$

Im letzten Integrale VI endlich gilt nach Ausschliefsung des Kugelinneren überall die Laplace'sche Gleichung $\varDelta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, also ist:

$$\text{VI} = 0 .$$

Jetzt lautet Gleichung (87) folgendermaafsen:

$$\overline{\iint} ds \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} - 4\pi \iiint \frac{\varepsilon\, dx\, dy\, dz}{r} = \overline{\iint} ds\, \varphi \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_i} - 4\pi\,\varphi_{(a,\,b,\,c)}, \quad (87\,\mathrm{a})$$

oder nach Division mit 4π und etwas geänderter Anordnung:

$$\varphi_{a,\,b,\,c} = \iiint \frac{\varepsilon\, dx\, dy\, dz}{r} + \overline{\iint} ds \frac{\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right)}{r} + \overline{\iint} d \cdot \frac{\varphi}{4\pi} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_i} . \quad (87\,\mathrm{b})$$

Der Werth von φ in dem ausgewählten Punkte ist hiermit dargestellt und zwar durch drei Summanden, deren jeder eine uns bereits bekannt gewordene Bedeutung hat. Der erste Summand besitzt die Normalform des Potentials, welches herrührt von der räumlichen Vertheilung der Ladungen, soweit sie im Inneren unseres abgegrenzten Raumgebietes liegen. Es sind dies physikalisch vorhanden angenommene reale elektrische Quanta, doch ist damit nicht ausgedrückt, dafs dieses alle Quanta sind, von denen φ herrührt. Es können vielmehr die Dichtigkeiten ε jenseits der Begrenzung sich weiter fortsetzen, denn diese Begrenzung ist hier nur eine fingirte mathematische Oberfläche, welcher gar keine physikalische Bedeutung oder Realität zuzukommen braucht. Ueber diese Begrenzung erstrecken sich nun die beiden hinzukommenden Integrale. Das erste derselben hat die Normalform des Potentials einer Flächenbelegung, deren Dichtigkeit durch

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} \tag{87c}$$

gegeben ist; das zweite sieht nach Gleichung (68), S. 72, aus, wie das Potential einer Doppelschicht, deren Moment durch

$$\mathfrak{M} = \frac{\varphi}{4\pi} \tag{87d}$$

gegeben ist, in beiden Ausdrücken für φ und dessen Differentialquotienten sind die entsprechenden Oberflächenwerthe zu nehmen. Von der realen Existenz dieser beiden Flächenbelegungen haben wir aber dadurch gar keine Gewifsheit. Die in Gleichung (87b) gegebene Darstellung des von einer wirklich vorhandenen Elektricitätsvertheilung herrührenden Potentials hat also die Eigenthümlichkeit, dafs sie ein beliebiges Raumgebiet bevorzugt, indem sie die darinnen liegenden Bestandtheile des Ladungssystems allein berücksichtigt, alle aufserhalb liegenden, ebenfalls concreten Ladungen aber wegläfst und zum Ersatz dieser Unterlassung eine nicht concret existirende Belegung der beliebig gewählten Oberfläche des Gebietes mit erstens einer einfachen und zweitens einer Doppelschicht fingirt. Das hat zur Folge, dafs φ im Inneren des Raumes zwar richtig dargestellt wird, aber aufserhalb den wirklichen Verlauf nicht mehr darstellt, sondern wie wir zeigen wollen, überall den Werth 0 annimmt.

Denken wir uns zu diesem Zwecke die fingirte Vertheilung als die wirkliche, also den äufseren Raum ganz leer, und die Oberfläche des Gebietes reell belegt mit den durch (87c und d) gegebenen Dichtigkeiten ε und Doppelschichtmomenten $\mathfrak{M}$.

Die Dichtigkeiten e bewirken dann einen Sprung, der nach der Normale genommenen Differentialquotienten von φ, den wir nach einer früher entwickelten Formel schreiben können

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = -4\pi e.$$

Dies stimmt mit Gleichung (87c) nur, wenn überall

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = 0$$

ist. Das Potential hat in der Richtung der nach aufsen gerichteten Normale an keiner Stelle der Oberfläche ein Gefälle, mufs daher im ganzen (leeren) Aufsenraum constant sein.

Die Doppelschicht bewirkt einen Sprung von φ selbst, welcher nach einer ebenfalls früher entwickelten Formel gegeben wird durch:

$$\varphi_i - \varphi_a = 4\pi \mathfrak{M}.$$

Dies stimmt mit (87d) nur, wenn an der Aufsenseite der Oberfläche

$$\varphi_a = 0$$

ist. Mithin ist der constante Werth, welchen φ im ganzen Aufsenraum bewahren mufs, der Werth $\varphi = 0$.

Die Ableitung der Gleichung (87b) aus dem Green'schen Satze wird nicht wesentlich verändert, wenn man neben der räumlichen Vertheilung ε auch noch reelle Flächenbelegungen e und reelle Punktladungen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots \mathfrak{e}_a \ldots$ als constituirende Elemente für das Potential φ annimmt. Man mufs dann diese Stellen, soweit sie im Inneren des Raumgebietes liegen, mit unter die Begrenzungen aufnehmen, wodurch die Oberflächenintegrale neue Beiträge liefern. Man übersieht leicht, da ähnliche Rechnungen schon mehrfach hier durchgeführt wurden, dafs an Stelle der Gleichung (87b) dann folgende erweiterte tritt:

$$\varphi_{abc} = \left\{ \iiint \frac{\varepsilon\, dx\, dy\, dz}{r} + \iint ds_u \frac{e}{r} + \sum_{a=1}^{n} \frac{\mathfrak{e}_a}{r} \right\} + \overline{\iint} ds \frac{\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}\right)}{r} + \overline{\iint} ds \frac{\varphi}{4\pi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_i}. \qquad (87e)$$

Die ersten drei Terme erstrecken sich auch jetzt über alle diejenigen Ladungen, welche im Innern des gewählten Gebietes liegen, nur

besteht dieser, in geschweifte Klammern geschlossene Theil jetzt aus drei Bestandteilen, entsprechend den verschiedenen Anordnungen der Ladungen in Räumen, Flächen, Punkten. (Geladene Linien hätte man als vierte Möglichkeit auch noch aufnehmen gekonnt.) Die beiden letzten Integrale über die äufsere Begrenzung haben durchaus die gleiche Bedeutung wie in (87 b).

Wenn man übrigens von dem Princip der continuirlichen Uebergänge Gebrauch machen will, so kann man Sprünge der Differentialquotienten von φ und Unendlichkeitsstellen von φ wegleugnen, erstere als Stellen auffassen, in der Elektricität schichtartig, aber doch in räumlicher Dichtigkeit dicht zusammengerückt liegt, letztere als knotenartige Anhäufungen räumlicher Ladungen ansehen, und kommt dann mit der einfacheren Gleichung (87 b) vollständig aus. Diese Gleichung stellt eine Integration der Poisson'schen Differentialgleichung für ein abgegrenztes Raumgebiet dar. Die Poisson'sche Differentialgleichung $\Delta \varphi = -4 \pi \varepsilon$ ist linear, aber nicht homogen. Ueber die Integrale solcher Differentialgleichungen giebt es einen allgemeinen Satz: Hat man zwei verschiedene Lösungen φ_1 und φ_2 gefunden, so können diese sich nur unterscheiden um eine Function, welche im ganzen Gebiete ohne Ausnahme der entsprechenden homogenen Differentialgleichung genügt. Das ist in unserem Falle die Laplace'sche. Eventuelle geforderte Unstetigkeiten müssen sich in der Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ wegheben, da sie beiden Lösungen gleichermaafsen eigen sind. Man kann also aus irgend einem partikulären Integral, welches nur der Poisson'schen Gleichung, aber nicht den Grenzbedingungen genügt, jedes andere durch Hinzufügung von Integralen der Laplace'schen Gleichung erhalten. In Gleichung (87 b) ist dies geschehen: Das Raumintegral über $\frac{\varepsilon}{r}$ befriedigt die Poisson-Gleichung, die beiden folgenden Oberflächenintegrale genügen der Laplace-Gleichung, weil sie Potentiale sind von Belegungen, die den Innenraum nicht besetzen. Die eigenthümliche Bildung dieser beiden Zusätze ist nun aber eine Folge der besonders einfachen Form, welche wir der Hülfsfunction U im Green'schen Satze gegeben haben, indem wir sie $= \frac{1}{r}$ setzten.

Der Mathematiker wird die Gleichung (87 b) nicht für eine vollgültige Integration der Poisson'schen Differentialgleichung in dem abgegrenzten Raumgebiet ansehen, denn, wenn die partielle Differentialgleichung im Integrationsgebiet vorgeschrieben ist, will er die Form der Lösung eindeutig angegeben sehen, sobald die Grenz-

bedingungen bekannt sind. Darunter sind aber nur die Werthe der gesuchten Function selbst verstanden, welche an der Begrenzung vorgeschrieben sind. Wir haben aber auch deren Differentialquotienten nach der inneren Normale benützt, also eine Kenntnifs wenigstens des Anlaufs, den φ nimmt, wenn man von der Begrenzung ins Innere dringt.

§ 27. Fortsetzung unter Verwendung der Green'schen Function.

Es giebt eine im Princip der vorigen ganz ähnliche Behandlung des in Rede stehenden Problems, welche zur Lösung der Aufgabe nur die Grenzwerthe von φ selbst erheischt, nicht auch die von $\partial \varphi / \partial n_i$; aber die Hülfsfunction U hat dabei nicht die einfache Gestalt, welche wir ihr im Vorigen gegeben haben.

Diesen Weg hat bereits Green eingeschlagen, und man nennt defshalb die dazu taugliche Hülfsfunction die Green'sche Function. Um den rein mathematischen Beweis für ihre eindeutige Existenz haben sich Gauss, Dirichlet und andere Mathematiker verdient gemacht, siehe § 30 S. 128. Doch kann man sich durch eine physikalische Vorstellung ohne Mühe die Ueberzeugung verschaffen, dafs sie thatsächlich bei jeder Form der Raumbegrenzung und bei jeder Lage des inneren Punktes (a, b, c) gefunden werden kann und nur in einer einzigen Art ihres Verlaufes gefunden werden kann. Dafs man sie durch einen expliciten Rechenausdruck angeben kann, soll damit nicht gesagt sein, dies gelingt nur bei besonders regelmäfsiger Gestalt der Begrenzungsfläche.

Die Green'sche Function U soll folgende Bedingungen erfüllen: 1. In dem Punkte (a, b, c), in welchem man den Werth von φ sucht, soll sie unendlich werden in ganz derselben Weise, wie die im vorigen Paragraphen benützte Function $\frac{1}{r}$. 2. Im ganzen übrigen Innenraum soll sie der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügen. 3. An der geschlossenen Begrenzungsfläche soll sie überall den Werth $\overline{U} = 0$ haben. Den Verlauf dieser Function U veranschaulicht uns folgende physikalische Vorstellung: Wir denken uns alle die Ladungen, von denen φ herrührt, fortgeschafft, denken uns ferner den abgegrenzten Raum als eine Höhlung in einem metallischen Körper, oder wenigstens umhüllt von einem metallischen Mantel, dessen innere Wandung die Grenzfläche bildet. In den

Punkt (a, b, c), welcher irgend wo in der Höhlung liegt, stellen wir isolirt eine Punktladung $+1$ und verbinden die Metalloberfläche leitend mit dem Erdkörper, den wir als unendlich grofsen Leiter mit dem Potentialwerth 0 ansehen dürfen. Dann stellt sich ein ganz bestimmter elektrostatischer Ruhezustand her. Negative Quanta, herbeigezogen durch die positive Punktladung bedecken in ganz eindeutig bestimmter Dichtigkeitsvertheilung der Flächenbelegung die innere Metallwandung, und es besteht in dem Hohlraum ein elektrisches Feld, dessen Potential nichts anderes ist, als die GREEN'sche Function. Die erste Bedingung wird durch die Punktladung befriedigt, die zweite dadurch, dafs der Hohlraum im übrigen leer gedacht wird, die dritte endlich durch die leitende Verbindung der Hülle mit der Erde. Ueber die mathematische Darstellung läfst sich im Allgemeinen nur so viel aussagen, dafs die GREEN'sche Function in die Form gebracht werden kann:

$$U = \frac{1}{r} - U'. \tag{88}$$

Der erste Summand, die einfache Hülfsfunction des vorigen Paragraphen, besorgt das Unendlichwerden in dem ausgewählten Punkt (a, b, c) und befriedigt im übrigen Raum die LAPLACE'sche Gleichung. Der hinzugekommene Summand $-U'$ hat die Aufgabe, die Function an der Oberfläche auf Null herunter zu drücken, ohne ihre übrigen Eigenschaften zu stören. Bezeichnen wir also mit $\bar{r}$ den Abstand der einzelnen Oberflächenelemente von dem ausgewählten Punkt im Inneren, so mufs U' an der ganzen Oberfläche die Werthe besitzen, welche durch

$$\bar{U}' = \frac{1}{\bar{r}} \tag{88a}$$

vorgeschrieben sind. Im inneren Raum aber mufs U', stetig an $\bar{U}'$ anknüpfend, überall der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen ohne jede Ausnahmestelle, ganz wie ein Potential in einem gänzlich leeren Raume. Das Problem der Auffindung der GREEN'schen Function ist hierdurch zurückgeführt auf das einfachere, eine Function U' zu bestimmen, welche im ganzen inneren Raum **ohne Ausnahmestelle** der LAPLACE'schen Gleichung genügt und sich stetig einem vorgeschriebenen Verlauf an der Oberfläche anschmiegt. In unserem Falle ist es sogar ein durch das einfache Gesetz (88a) vorgeschriebener Verlauf. Wir werden bei der Betrachtung des elektrostatischen Gleichgewichtes in Leitern auf das gleiche Problem ohne

die Besonderheit (88a) stofsen, und defshalb die Betrachtungen darüber bis dahin verschieben, zumal wir durch das beschriebene physikalische Bild von der eindeutigen Existenz von U, folglich auch von U' überzeugt sind.

Nun wenden wir, wie im vorigen Paragraphen, den GREEN'schen Satz in der Form (75 b) an, schneiden die Unendlichkeitsstelle von U durch Kugel von Radius ϱ heraus und erhalten, entsprechend (87)

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\iint} ds\, U \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \overset{(k)}{\iint} \varrho^2 d\sigma\, U \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \iiint U \Delta \varphi\, dx\, dy\, dz \\ = &\overline{\iint} ds\, \varphi \frac{\partial U}{\partial n_i} + \overset{(k)}{\iint} \varrho^2 d\sigma\, \varphi \frac{\partial U}{\partial r} + \iiint \varphi\, \Delta U\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Diese sechs Integrale in der hier stehenden Reihenfolge nennen wir wieder I, II, III, IV, V, VI.

Der Unterschied gegen die vorige Darstellung zeigt sich gleich im ersten Integrale, denn es ist jetzt

$$\mathrm{I} = 0,$$

weil U an der Oberfläche gleich Null ist. Ueber IV ist nichts zu bemerken. In den beiden Kugelintegralen benützen wir (88). Dann wird:

$$\mathrm{II} = \overset{(k)}{\iint} \varrho^2 d\sigma \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \overset{(k)}{\iint} \varrho^2 d\sigma\, U' \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Beide Integrale verschwinden zugleich mit ϱ, das erste ist identisch mit dem entsprechenden des vorigen Paragraphen, das zweite enthält noch eine Potenz mehr von der verschwindenden Gröfse ϱ, während U' an der Kugel endlich bleibt. Es ist also auch hier:

$$\mathrm{II} = 0.$$

Im Integrale V ist $\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho^2} - \frac{\partial U'}{\partial r}$ zu setzen, also

$$\mathrm{V} = -\overset{(k)}{\iint} \varrho^2 d\sigma \frac{1}{\varrho^2} \varphi - \overset{(k)}{\iint} \varrho^2 d\sigma\, \varphi \frac{\partial U'}{\partial r}.$$

Das erste ist wieder identisch mit dem V des vorigen Paragraphen, das zweite verschwindet wegen des Factors ϱ^2 und regulären Verlaufs von $\frac{\partial U'}{\partial r}$ an der Stelle der kleinen Kugel, also ist

$$\mathrm{V} = -4\pi\, \varphi_{(a,b,c)}.$$

Endlich ist wegen der POISSON'schen Differentialgleichung:

$$\mathrm{III} = -4\pi \iiint U s\, dx\, dy\, dz,$$

und wegen der LAPLACE'schen Differentialgleichung:

$$\mathrm{VI} = 0.$$

Im Ganzen ist also, wenn man V allein auf die linke Seite stellt und durch 4π dividirt:

$$\varphi_{(a,b,c)} = \iiint U s\, dx\, dy\, dz + \overline{\iint} ds \frac{\varphi}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial n_i}. \tag{89a}$$

Sind aufser der Raumdichtigkeit s noch Flächen vorgeschrieben, an welchen $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gegebene Sprünge machen soll, die man sich also mit bekannten Flächenbelegungen von der Dichtigkeit e geladen zu denken hat, so kommt zur rechten Seite noch ein Integral über diese Unstetigkeitsflächen hinzu von der Form:

$$+ \iint ds_u\, U e.$$

Sind endlich auch Unendlichkeitsstellen von φ vorgeschrieben, die von Punktladungen $e_1 \ldots e_a \ldots$ herrühren, so kommt rechts noch hinzu:

$$+ \sum_a U e_a.$$

In diesen beiden eventuell hinzutretenden Termen sind für U die Werthe zu setzen, die an den Stellen der vorhandenen e und e_a herrschen. (Unter Zulassung des Princips der Continuität kann man die e und e_a als sehr dicht zusammengedrängte Raumladungen ansehen, dann fallen sie mit unter das Raumintegral (89a) und diese Gleichung ist ohne die eben angeführten Zusätze vollständig.)

Es ist nun in Gleichung (89a) gelungen den Werth von φ in jedem Punkte eines beliebigen Raumgebietes anzugeben, wenn die POISSON'sche Differentialgleichung, d. h. die Vertheilung von s, und die Oberflächenwerthe von φ gegeben sind; sie stellt daher eine vollgültige Integration der Differentialgleichung dar. Zugleich sieht man, dafs es stets eine und nur eine passende Lösung giebt, weil es stets eine eindeutige GREEN'sche Function U geben mufs, deren Kenntnifs allerdings dabei vorausgesetzt wird.

Je weiter die Grenzen des Raumgebietes hinausgeschoben werden, um so kleiner werden für Punkte im Endlichen die Beträge $1/\bar{r}$,

um so unbedeutender wird zugleich damit auch die Function U', welche ja im Inneren nirgends gröfser werden kann, als der höchste vorkommende Werth von $1/\bar{r}$, weil ein ausnahmeloses Integral der LAPLACE'schen Gleichung kein Maximum haben kann. Bei unbegrenztem Raume geht daher die GREEN'sche Function in die einfache Form $U = 1/r$ des vorigen Paragraphen über; die beiden Gleichungen (87 b) und (89 a) werden dann gleichbedeutend und geben:

$$\varphi_{a,b,c} = \iiint \frac{\varepsilon \cdot dx\, dy\, dz}{r},$$

welchem eventuell bei Flächen- und Punktladungen noch hinzuzufügen sind:

$$+ \iint ds_u \frac{e}{r} + \sum_a \frac{e_a}{r} \cdot$$

Die Oberflächenintegrale über die unendlich ferne Begrenzung nämlich verschwinden in beiden Gleichungen, wenn φ in grofser Entfernung abnimmt wie $\dfrac{\text{Const}}{r}$. Dies dürfen wir aber annehmen, wenn φ nur von Ladungen im Endlichen herrührt.

§ 28. Ein Satz von Gauss über Potentiale in leeren Raumgebieten.

Wir können an die Entwickelungen der beiden vorhergehenden Paragraphen einen Satz als besonders einfachen Sonderfall anschliefsen, welcher von GAUSS (Allgemeine Lehrsätze 1840) ohne Benutzung des GREEN'schen Satzes abgeleitet wurde.

Wir denken uns einen leeren Raumbezirk, in welchem ein Potential φ existirt, das dort natürlicher Weise überall der LAPLACE'schen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt. Als Begrenzung des Integrationsgebietes denken wir uns in diesem Bezirk eine Kugelfläche vom Radius R, und als den Punkt (a, b, c), in welchem wir φ bestimmen wollen, wählen wir das Centrum dieser Kugel. Die beiden Schlufsgleichungen (87 b) und (89 a) leisten uns dabei gleich gute Dienste. In beiden fallen die Raumintegrale fort, weil nach Voraussetzung $\varepsilon = 0$ ist. Betrachten wir zuerst (87 b) für diesen Fall: Im ersten nimmt der Nenner r den festen Werth R an, im zweiten ist:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_i} = - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}, \quad \text{also} = \frac{1}{R^2} \cdot$$

Es folgt daher, wenn wir den Werth im Centrum der Kugel mit φ_0 bezeichnen:

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi R}\overline{\iint} ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{1}{4\pi R^2}\overline{\iint} ds\, \varphi.$$

Das erste dieser beiden Integrale verschwindet aber, weil die Kugel einen ladungsfreien Raum enthalten soll.

Bei Verwendung der Gleichung (89 a) müssen wir erst die GREEN'sche Function suchen. Diese wird bei den einfachen Bedingungen dieser Aufgabe leicht gefunden. Da nämlich überall $1/\bar{r} = 1/R$ ist, ist auch $U' = \frac{1}{R}$ (im ganzen Kugelraum constant), also:

$$U = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

mithin

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Es folgt also beide Male das gleiche Ergebnifs:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\overline{\iint} ds\, \varphi. \tag{90}$$

Diese Formel stellt φ_0 dar als den arithmetischen Mittelwerth aller an der Kugeloberfläche herrschenden Werthe von φ, denn $\iint ds\, \varphi$ summirt alle Flächenelemente der Kugel, jedes multiplicirt mit dem dort herrschenden Werth von φ, und der vorgestellte Divisor $4\pi R^2$ mifst die gesammte Kugelfläche. Wir haben hiermit den von GAUSS gefundenen Satz abgeleitet, welcher in Worten so ausgesprochen werden kann: „In ladungsfreien Raumgebieten ist der Potentialwerth in jedem Punkte gleich dem arithmetischen Mittel der Potentialwerthe auf einer um diesen Punkt als Centrum gelegten Kugelfläche. Auf den Radius kommt es dabei nicht an, so lange nur die Kugel nicht in geladene Gebiete hineinragt".

Mit Hülfe dieses Satzes kann man noch folgende principiell wichtige Eigenschaft der Potentialfelder nachweisen: Ist in einem endlichen ladungsfreien Raumgebiet das Potential als constant erkannt, so mufs es den gleichen constanten Werth auch über die Grenzen des Gebietes hinaus bewahren, so weit der ladungsfreie Raum reicht. Den Beweis führt man dadurch, dafs man Kugelflächen gelegt denkt, deren Centra noch in dem Gebiete liegen, in denen φ

als constant erkannt ist, während die Oberflächen theilweise in unbekanntes Gebiet hinausragen, von welchem man nur weifs, dafs es leer von elektrischen Ladungen irgend welcher Art ist. Wenn dann auf den hinausragenden Flächentheilen das Potential andere Werthe hätte, wie im bekannten Gebiet, so könnte der Mittelwerth über die Oberfläche nicht den Werth im Centrum ergeben, welches noch ins innere Gebiet fällt. Die Ausflucht, dafs die variablen Antheile der hinausragenden Kugelcalotten sich gegenseitig vernichten, ist wegen der ganz beliebigen Lage der Kugeln hinfällig. So kann man das bekannte Gebiet durch immer weiter vorgeschobene neue Kugelflächen erweitern und schliefslich allen zusammenhängenden leeren Raum dadurch für die Erkenntnifs des constanten Potentialwerthes erobern.

Anmerkung. Eine, wenn auch kleine, aber doch endliche Ausdehnung mufs bei dieser Beweisführung das ursprüngliche Gebiet haben, in welchem die Constanz des Potentials verbürgt ist, sonst könnte man zu falschen Schlüssen geführt werden. Wir erwähnten früher (S. 97) die Möglichkeit eines Sattelwerthes des Potentials im leeren Raume zwischen zwei gleichgeladenen Punkten. An solcher Stelle hat man allerdings einen verschwindend kleinen Raum, in welchem φ nach keiner Richtung hin ein Gefälle zeigt, also constant erscheint. Doch dürfte man dieses verschwindend kleine Gebiet nicht durch solche Kugelflächen-Taktik, wie wir sie vorher anwendeten, erweitern wollen.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht der Elektricität auf leitenden Körpern.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundsätze.

§ 29. Leitfähigkeit und Influenzirbarkeit, allgemeine Bedingung des Gleichgewichts.

Unter einem Leiter der Elektricität oder einem Conductor versteht man, der Erfahrung entsprechend, einen Körper, in welchem elektrische Quanta ihren Ort verändern können, ohne den ponderablen Träger mitzunehmen, in welchem sie also gewissermaafsen fliefsen

können. Daher nennt man die elektrischen Quanta in Leitern auch wohl Fluida. Die Ursache des eintretenden Fliefsens oder der Fortleitung ist immer das Wirken einer elektrischen Kraft, welche die Quanta nach ganz demselben Grundgesetz angreift, welches wir zu Anfang des ersten Abschnittes aufstellten, nur mit dem Unterschied, dafs hier nicht die Träger der Ladungen angegriffen werden, also keine ponderomotorischen Wirkungen erzeugt zu werden brauchen. Man nennt defshalb die elektrische Kraft in diesem Falle zum Unterschiede von dem vorigen auch elektromotorische Kraft. Ein begrifflicher Unterschied besteht aber nicht zwischen beiden: Die Vorstellung des elektrischen Feldes mit seiner Potentialfunction gilt hier ebenso, wie vorher. Aber eine Erweiterung der Vorstellung von den elektrischen Quantis ist jetzt nöthig.

Mit dem Worte Quantum soll doch ausgedrückt werden, dafs man es mit einer unzerstörbaren und unvermehrbaren Gröfse zu thun hat, welche in leitenden Körpern nur die Freiheit hat, ihren Sitz zu verändern. Die Unveränderlichkeit des Ladungsquantums kann man nun bei einem gut isolirten Conductor auch noch nachweisen, so lange man äufsere elektrische Kräfte fernhält. Kann man die Gestalt des Conductors verändern, so verändert sich zwar die Anordnung seiner Ladung, aber die Gesammtmenge der ihm mitgetheilten Elektricität bleibt unverändert, wenigstens kann man deren früher oder später bemerkbare Abnahme immer befriedigend erklären durch mangelhafte Isolirung oder durch Leitfähigkeit der Luft, welche den Conductor umgiebt. Die mitgetheilte Ladung besitzt dabei immer auf allen Stellen des Conductors gleiches Vorzeichen. Bringt man aber diesen Conductor in ein hinreichend starkes elektrisches Feld, so kann man beobachten, dafs er an verschiedenen Stellen entgegengesetzte Ladungen zeigt, von denen die eine beider Arten vorher nicht zu beobachten war, also neu entstanden sein mufs. Auch zeigt die vorher vorhandene Art jetzt gröfseres Quantum. In gewöhnlichem Sinne kann man also nicht von Unvermehrkeit der Ladung sprechen, doch bestätigen alle Erfahrungen, dafs stets gleich grofse Mengen positiver und negativer Ladungen entstehen, so dafs man die Constanz der Elektricitätsmengen auf einem isolirten Conductor gewahrt findet, wenn man unter Menge die algebraische Summe der positiven und negativen Quanta versteht. Man kann die Vorstellung von dem substantiellen Charakter der elektrischen Ladungen angesichts dieser Erscheinungen nur mit einer gewissen Gewaltsamkeit retten, welche unser Anschauungsbedürfnifs nicht recht befriedigt. Man nimmt nämlich an,

dafs sich in allen Körpern gleichgrofse Quanta der beiden entgegengesetzten Elektricitäten in unerschöpflicher Menge überall bei einander befinden, ohne dafs deren Gegenwart sich durch irgend etwas verräth, weil die entgegengesetzten Wirkungen der positiven und negativen Fluida sich neutralisiren. Aus diesem Vorrath treten, durch irgend welche Processe von einander getrennt, die einzelnen positiven und negativen Quanta — immer beide in gleichen Mengen — hervor in die Erscheinung, man könnte sagen, in die Wirklichkeit, um gelegentlich bei anderen Processen wieder zusammenzufliefsen zu „Nichts", denn das ist in der That der sich durch keinerlei Wirkungen verrathende unerschöpfliche Vorrath. Wenn man das Unbefriedigende der Hypothese, dafs zwei Substanzen von polar entgegengesetzten Eigenschaften sich vernichten sollen, als unvermeidlich hinnimmt, so erklärt im Weiteren diese Auffassung die Phänomene in befriedigender Weise. Man kennt keinen Procefs der Elektricitätserzeugung, bei welchem nicht gleichgrofse Mengen positiver und negativer Ladungen gebildet werden. Dies gilt auch von der ältest-bekannten Erzeugung durch Reibung zweier verschiedener Körper, und hier begegnen wir bei der Betrachtung eines Conductors, der in ein äufseres elektrisches Feld gebracht wird, einer zweiten davon verschiedenen Entstehungsweise. Die frei beweglichen, einander neutralisirenden, beiden Fluida werden durch den Angriff der äufseren elektrischen Kraft in entgegengesetzter Richtung fortgeführt, die positiven in Richtung fallenden, die negativen in Richtung steigenden Potentiales. Dadurch werden beide räumlich getrennt, und äufsern als reelle Ladungen ihre charakteristischen Wirkungen. Dafs diese Trennung bei elektrostatischen äufseren Kräften zu einem bestimmten Gleichgewichtszustand führen mufs, nachdem endliche Mengen positiver und negativer Elektricität von einander getrennt worden sind, werden wir bald beweisen. Man nennt diese Trennung „Influenz". Besteht der Conductor aus zwei geeigneten trennbaren Theilen, die sich einzeln isoliren lassen, so kann man nach Eintritt des Gleichgewichts die positiv geladenen Regionen für sich abheben, und die negativen ebenfalls, und sie aus dem erzeugenden Felde und aus der Nachbarschaft der anderen Hälfte wegbringen und erhält so zwei mit entgegengesetzt gleichen Quantis beladene einzelne Conductoren. Die Influenzmaschinen sind nichts als Apparate, welche durch eine drehende Bewegung ihrer Theile fortgesetzt und continuirlich diese beiden Akte wiederholen: Trennung der Elektricitäten durch Influenz und räumliche Trennung der damit beladenen Conductoren.

So lange im Inneren eines Leiters elektrische Kraft herrscht, findet Trennung und entgegengesetzte Fortführung beider Elektricitäten statt, es besteht kein Ruhezustand. Die getrennten Ladungen aber erzeugen ein eigenes neues Feld, welches sich dem ursächlichen äufseren Felde superponirt und dieses schwächt. Ruhe kann erst eintreten, wenn das äufsere Feld im ganzen Innenraum des Leiters gerade aufgehoben wird durch das Feld der influenzirten Ladungen. Sobald dieser Zustand eingetreten ist, hört die Trennung auf und es besteht Ruhe der Ladungen, welche so lange währt, als das äufsere Feld unverändert gelassen wird. Nun sieht man sogleich ein, dafs bei diesem Ruhezustand im inneren Raum des Leiters sich keine Ladungen halten können, denn diese würden um sich herum immer ein Feld erzeugen, und zwar ein solches, welches auf keine Weise durch das äufsere Feld aufgehoben werden kann. Die durch Influenz getrennten Quanta wie auch die dem Leiter eventuell von Anfang im Ueberschufs mitgetheilte Ladung müssen also im Gleichgewichtszustand bis an die Grenzen des Leiters gerückt sein, dessen Oberfläche sie in einer bestimmten Vertheilung der Flächendichtigkeit belegen.

In „guten" Leitern, zu denen namentlich die Metalle und das für gewöhnlich immer mit Spuren von gelösten Salzen behaftete Wasser und auch feuchte, d. h. mit Wasser durchtränkte Stoffe gehören, geschieht die zur elektrischen Ruhe führende Dislocation der Fluida in so aufserordentlich kurzer Zeit, dafs sie bei mäfsiger Ausdehnung der Conductoren überhaupt nicht direct beobachtet werden kann, vielmehr den Eindruck einer momentanen Wirkung macht. Es bestehen indessen zwischen den guten (vollkommenen) Leitern und den vollkommenen Nichtleitern oder Isolatoren Zwischenstufen: Körper, in denen die hier allgemein charakterisirte elektrostatische Dislocation den äufseren Feldkräften nicht momentan folgt, sich aber nach einiger Zeit herstellt. In die Klasse dieser Halbleiter gehören streng genommen alle wirklichen Körper, doch nähern sich einige Gruppen sehr stark den beiden idealen Grenzfällen. Dafs sich in den sogenannten vollkommenen Nichtleitern und auch in den schlechten Halbleitern, in letzteren lange vor Eintritt der Ruhe durch Leitung, momentan ein anderer merkwürdiger Zustand ausbildet, den man als dielektrische Polarisation bezeichnet, soll uns hier noch nicht beschäftigen. Wir betrachten hier den definitiven Ruhezustand, der durch Freizügigkeit beider Elektricitäten in den ganzen ausgedehnten Körpern zu Stande kommt. Dieser ist unabhängig davon, wie gut das Leitvermögen ist, oder wie lange es dauert, bis

er erreicht ist. Es kommt dabei nur an auf die Gestalt des Leiters, auf die ihm mitgetheilte Ladung und auf das influenzirende äufsere Feld.

Wir müssen nun die Gleichgewichtsbedingung mathematisch formuliren. Das Verschwinden der elektrischen Kraft im Inneren des Leiters fordert daselbst constantes Potential bis an die Oberfläche, welche an vollkommen nichtleitende Substanzen, Isolatoren, feste, flüssige oder gasförmige, zu denen auch das möglichst vollkommene Vacuum zu rechnen, angrenzt. An der Berührungsfläche zweier chemisch verschiedener Leiter hat man allerdings Sprünge der Potentialfunction nachgewiesen, welche auch im Ruhezustand gewahrt bleiben. Solche Potentialsprünge stören aber nicht die Gleichgewichtsbedingung, wenn nur das Potential zu beiden Seiten kein Gefälle besitzt. Man kann sich in solchen Berührungsflächen von dem hier vorgetragenen Standpunkt aus Doppelschichten denken, deren Fernwirkung ja nach früheren Auseinandersetzungen eine verschwindende ist. Zunächst sehen wir aber von solchen für die Elektrostatik unwesentlichen Complicationen ab und betrachten einen begrenzten homogenen Leiter, welcher in ein gegebenes äufseres elektrisches Feld gebracht ist. Das Potential dieses Feldes, wenn der Leiter nicht darin liegt, sei φ. Es rühre her von festen Ladungen, die jedenfalls den Raum, in welchen der Leiter gebracht werden soll, leer lassen, so dafs dort überall $\Delta \varphi = 0$ ist. Nun kommt der beladene oder unbeladene Conductor, vollkommen isolirt, in eine bestimmte Stellung im Felde und die Vertheilung der Ladung, eventuell auch die Trennung der verbundenen Fluida stellt sich her. Der Gleichgewichtszustand wird nicht gestört, wenn wir die frei beweglichen Fluida, welche die Oberfläche des Conductors nun ruhend bedecken, uns als unverrückbar an ihren Orten festgehalten denken.

Dann können wir das äufsere ursächliche Feld weggenommen denken und der Conductor mit der auf ihm fixirten Ladung bleibt allein zurück. Diese Oberflächenladung für sich allein bewirkt ein elektrisches Feld sowohl im Inneren des Leiters wie im äufseren Raum. Das Potential dieses Feldes sei φ'. Es mufs wegen der Abwesenheit räumlicher Ladungen innen und aufsen bis an die Oberfläche heran der Differentialgleichung $\Delta \varphi' = 0$ genügen. Die auf der Begrenzung angesammelten Flächenladungen werden aber die uns bereits bekannten Sprünge der Differentialquotienten $\partial \varphi' / \partial n$ hervorbringen. In Wirklichkeit besteht nun das äufsere Feld zusammen mit dem von der Oberflächenbelegung herrührenden. Die

beiden Potentialfunctionen φ und φ' superponiren sich überall durch algebraische Addition, es herrscht deſshalb im Raum das Potential $\varphi + \varphi'$ und die Gleichgewichtsbedingung besteht darin, daſs für das zusammenhängende Innere des Conductors bis zu dessen Oberfläche gilt:

$$\varphi + \varphi' = \text{Constans.} \tag{91}$$

Der Werth der Constanten wird hierdurch nicht bestimmt. Wird das Potential φ des äuſseren Feldes ohne disponible additive Constante angegeben, etwa in der bestimmten Form $\sum e/r$, so kann die Unbestimmtheit des Werthes in der Gleichgewichtsbedingung (91) nur daher rühren, daſs nicht angegeben ist, wie groſs die dem Conductor eventuell mitgetheilte Ladung ist. Wir können aber diese Unbestimmtheit abspalten, indem wir φ' in zwei Summanden zerlegen:

$$\varphi' = \varphi'' + \varphi'''$$

und fordern

$$\varphi + \varphi'' = 0 \tag{91 a}$$

$$\varphi''' = \text{Const.} \tag{91 b}$$

für das Innere des Conductors bis zur Oberfläche. Dadurch wird die sich auf dem Conductor bildende Oberflächenbelegung aufgefaſst als algebraische Summe zweier verschiedener Belegungen, welche einzeln die Potentiale φ'' und φ''' hervorbringen würden. Man kann auch leicht erkennen, unter welchen Bedingungen diese beiden einzelnen Belegungen sich in Wirklichkeit herstellen können. Die Belegung, die φ'' erzeugt, bildet sich, wenn der Conductor im influenzirenden Felde zur Erde abgeleitet ist, weil dann der Potentialwerth auf ihm $= 0$ ist, wie (91 a) fordert. Die andere Belegung, welche φ''' erzeugt, bildet sich, wenn man dem isolirten Conductor eine passende Ladung mittheilt und das äuſsere influenzirende Feld fortnimmt.

Beide Theile, φ'' und φ''', müssen einzeln innen und auſsen der Laplace'schen Differentialgleichung genügen, ihre Differentialquotienten nach der Normale der Conductoroberfläche besitzen die den Flächendichtigkeiten ε'' und ε''' entsprechenden Sprünge. Im äuſseren Raum in unendlicher Entfernung müssen φ'' und φ''' als Potentiale endlicher, in beschränktem Bezirk angeordneter Elektricitätsmengen verschwinden mindestens wie A/r. Durch diese Eigenschaften ist das Gleichgewichtsproblem der Elektricität auf einem Leiter mathematisch vollkommen bestimmt. Wirkliche explicite Lösungen durch Berechnung zu finden, ist nur für be-

sonders einfache Gestalt des Conductors gelungen, namentlich für die Kugelgestalt.

Dafs sich stets ein eindeutig bestimmter Ruhezustand herstellen mufs, wie die Erfahrung zeigt, läfst sich theoretisch beweisen. Diesen Nachweis, im Wesentlichen so, wie er von GAUSS gegeben worden ist, wollen wir im nächsten Paragraphen führen.

§ 30. Es giebt stets eine eindeutige Lösung des Gleichgewichtsproblems.

In den soeben aufgestellten Bedingungen findet sich ein Pleonasmus. Die Gleichung (91a) fordert, dafs im ganzen Raum des Conductors $\varphi'' = -\varphi$ sein soll. Andererseits fordert die Leerheit des Inneren an Ladungen die ausnahmslose Erfüllung der Gleichung $\Delta\varphi'' = 0$. Diese ist aber bereits dadurch befriedigt, dafs angenommen werden mufste, das äufsere Feld habe in dem für den Conductor zu reservirenden Raumgebiet keine Dichtigkeiten, woraus für dieses Gebiet $\Delta\varphi = 0$, folglich auch $\Delta(-\varphi) = \Delta\varphi'' = 0$ sich ergiebt. Es soll nun zuerst gezeigt werden, dafs es genügt, die Bedingung (91a) nur für die Oberfläche des Conductors zu fordern, dafs der Verlauf durch das Innere dann durch die LAPLACE'sche Gleichung immer und nur auf eine einzige Weise bestimmt ist.

Bei der Willkürlichkeit des äufseren Feldes bilden die Werthe von $(-\varphi)$ an der Oberfläche des Conductors irgend eine beliebige stetige Werthvertheilung. Dieser mufs auch φ'' sich anschliefsen.

Nun wollen wir, anknüpfend an diese vorgeschriebenen Oberflächenwerthe, die Function φ'' stetig durch das Innere des Raumes fortsetzen. Das geht auf unendliche viele verschiedene Arten. Denken wir nämlich auf der Oberfläche Curven gezogen, welche Punkte gleichen Werthes von φ'' verfolgen (es sind dies die Schnitte der Conductorfläche mit den Niveauflächen des ursächlichen äufseren Feldes). In diese geschlossenen Curven als fest vorgeschriebene Rahmen kann man nun beliebige gekrümmte Flächen einsetzen, welche das Innere des Raumes durchqueren, so dafs sie einander nicht schneiden und um so ähnlicher verlaufen, je näher benachbart sie liegen. Auf jeder dieser Flächen soll φ'' denselben Werth besitzen, der auf ihrem Rahmen vorgeschrieben ist. So erhält man in jedem Falle eine stetige Fortsetzung der Function φ'' durch den inneren Raum.

Die örtlichen Schwankungen der Function können dabei beliebig grofs gemacht werden. Hat man irgend einen Verlauf an-

gesetzt, so kann man immer einen noch veränderlicheren daraus machen, indem man die beschriebenen Flächen enger zusammendrängt und ihnen dafür einen faltigeren Verlauf giebt. Eine obere Grenze für die Krausheit des übrigens immer noch stetigen Verlaufes der Function ist gar nicht zu erreichen. Wohl aber kann man nach einem möglichst glatten Verlauf fragen, welcher sich stetig anschliefst an die beliebig vorgeschriebenen Oberflächenwerthe. Veränderlich mufs φ'' auf jeden Fall sein, denn ein constanter Werth würde unstetig gegen die Grenzwerthe stofsen. Es handelt sich jetzt um die Auffindung einer mathematisch definirten Gröfse, welche sich mit den noch unbestimmten Begriffen der Krausheit oder der Glätte deckt. Die Veränderlichkeit des Werthes einer stetigen Function im Raume ist um so gröfser, je gröfser ihre Differentialquotienten nach den Coordinaten an der betreffenden Stelle sind. Dabei kommt es nicht darauf an, ob sie negativ oder positiv sind; bei grofser Krausheit werden die Vorzeichen von Ort zu Ort häufig wechseln. Wollte man daher über diese Differentialquotienten summiren, so würden sich die Beträge gegenseitig vernichten, und die Summe oder das Integral wäre kein Maafsstab für die Veränderlichkeit in einem endlichen Bezirke. Dies vermeidet man, wenn man die Quadrate der Differentialquotienten summirt, denn diese sind immer positiv. Wir stellen daher als Maafs der Krausheit von φ'' das Raumintegral über die Summe der Quadrate der Differentialquotienten auf, und geben diesem aus Gründen, die wir bald einsehen werden, den jedenfalls die Betrachtung nicht störenden Divisor 8π, betrachten also folgenden Ausdruck:

$$\Phi = \frac{1}{8\pi}\iiint d\tau\left\{\left(\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi''}{\partial z}\right)^2\right\}. \tag{92}$$

Das Integral ist über den ganzen Conductorraum zu erstrecken, dessen Volumelement mit $d\tau$ bezeichnet ist.

Suchen wir nun einen möglichst glatten Verlauf von φ'', so heifst das, wir suchen einen solchen, für den Φ ein Minimum wird. Mindestens ein solcher mufs existiren, denn Φ ist stets positiv, könnte nur $= 0$ werden, wenn im ganzen inneren Raume φ'' constant ist, was sich aber nicht mit dem stetigen Anschlufs an die Oberflächenwerthe verträgt. Die allgemeine Bedingung des Eintretens eines Maximums, Minimums oder Sattelwerthes fordert, dafs die Variation des Integrales verschwinde. Bei der Bildung der Variation haben wir an jeder Stelle des Raumes den Werth von φ'' um eine beliebige verschwindend kleine Gröfse $\delta\varphi''$ zu verändern, doch so,

dafs der veränderte Verlauf ebenfalls ein stetiger ist und sich an die vorgeschriebenen Oberflächenwerthe ebenfalls stetig anschmiegt. Darum mufs $\delta\varphi''$ eine stetige Raumfunction sein, welche überall an der Raumgrenze Null wird. Auch die Raumgrenzen, d. h. die Gestalt des Conductors wird von der Variation nicht verändert. Die Variation von Φ ist defshalb unter dem Integralzeichen an der geschweiften Klammer auszuführen nach dem Schema:

$$\delta\left\{\left(\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)^2\right\} = 2\,\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\cdot\delta\,\frac{\partial\varphi''}{\partial x} = 2\,\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\cdot\frac{\partial\,\delta\varphi''}{\partial x}\,. \tag{92a}$$

Die in dieser Gleichung vorgenommene Vertauschung in der Reihenfolge der Operationen δ und $\partial/\partial x$ rechtfertigt sich dadurch, dafs die Variation des Differentialquotienten nur eine Folge der Variation der Function selbst ist. Es ist nämlich begrifflich ganz primitiv folgendermaafsen:

$$\delta\left\{\left(\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)^2\right\} = \left(\frac{\partial(\varphi''+\delta\varphi'')}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\varphi''}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)^2.$$

Führt man das Binomquadrat aus und vernachlässigt das in zweitem Grade verschwindende $\left(\frac{\partial\,\delta\varphi''}{\partial x}\right)^2$, so bleibt nur das übrig, was in Gleichung (92a) angegeben ist.

Die Variation von Φ lautet nun:

$$\delta\Phi = \frac{1}{4\pi}\iiint d\tau\left\{\frac{\partial\varphi''}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta\varphi''}{\partial x} + \frac{\partial\varphi''}{\partial y}\,\frac{\partial\,\delta\varphi''}{\partial y} + \frac{\partial\varphi''}{\partial z}\,\frac{\partial\,\delta\varphi''}{\partial z}\right\}. \tag{92b}$$

Auf die rechte Seite dürfen wir den GREEN'schen Satz anwenden, denn sowohl φ'' wie $\delta\varphi''$ sind Raumfunctionen, welche den Bedingungen seiner Anwendbarkeit genügen, wenn man nach $\delta\varphi''$ integriren will. Setze also in Gleichung (75) $U = \varphi''$, $V = \delta\varphi''$ und es folgt die Gleichung:

$$\delta\Phi = -\frac{1}{4\pi}\overline{\iint} ds\cdot\delta\varphi''\cdot\frac{\partial\varphi''}{\partial n_i} - \frac{1}{4\pi}\iiint d\tau\cdot\delta\varphi''\cdot\Delta\varphi''. \tag{92c}$$

Das Oberflächenintegral dieses Ausdrucks verschwindet, weil die Variation $\delta\varphi''$ an der Raumgrenze verschwindet; es bleibt nur das Raumintegral übrig als Ausdruck für $\delta\Phi$. Das sicherlich existirende und hier gesuchte φ'', für welches die Krausheit ein Minimum, mithin $\delta\varphi = 0$ wird, mufs also der Bedingung genügen

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint d\tau\cdot\delta\varphi''\cdot\Delta\varphi'' = 0\,. \tag{92d}$$

Angenommen, es wäre bei dem gesuchten Verlauf der Function φ'' möglich, dafs $\Delta\varphi''$ stellenweise oder überall von Null abwiche, so könnte man bei dem willkürlich gelassenen Verlauf der Variation dem Integranden in jedem Volumelement ein positives Vorzeichen sichern, ohne die Stetigkeit der Variation zu verletzen. Die Variation brauchte nur gleichartig mit dem $\Delta\varphi''$ durch Null hindurchzugehen. Dadurch würde aber bewirkt, dafs die linke Seite von (92d) wesentlich von Null verschieden wird, weil sie aus lauter gleichstimmigen Summanden besteht. Das ist gegen die Forderung. Also mufs $\Delta\varphi'' = 0$ sein für den glattesten Verlauf von φ''. Die logische Consequenz ist also folgende: Da es nothwendig eine Function φ'' geben mufs, welche Φ bei vorgeschriebenen Oberflächenwerthen zu einem Minimum macht, so mufs es auch nothwendig eine Function (dieselbe $= \varphi''$) geben, welche im ganzen Raume der Laplace'schen Differentialgleichung genügt.

Es fehlt unserer Beweisführung noch der Nachweis der Eindeutigkeit, der nun folgen soll. Wir nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Verläufe, denen ein Minimum der Krausheit zukommt. Für beide Functionen mufs dann gelten, dafs sie ausnahmelose Integrale der Laplace'schen Differentialgleichung sind, und an der Oberfläche des Conductors stetig in die dort vorgeschriebenen Werthe übergehen. Ihre Differenz mufs also an der Oberfläche $= 0$ sein und mufs im ganzen Innenraum der Laplace'schen Differentialgleichung genügen. Das ist aber auf keine andere Weise möglich, als dafs die Differenz im ganzen Innenraum $= 0$ ist. Dies geht ohne Weiteres aus Gleichung (83) hervor, wenn man in derselben für φ die hier angenommene Differenz einsetzt. Es giebt also nicht zwei verschiedene Verläufe, welche $\delta\Phi = 0$ machen, sondern nur einen und stets einen. Damit fällt auch die vorher noch mögliche Bedenklichkeit fort, ob die Bedingung $\delta\Phi = 0$ wirklich zu einem Minimum von Φ führt, nicht etwa zu einem Maximum oder Sattelwerth. Denn ein Minimum mufs existiren, die übrigen Sondererscheinungen könnten höchstens hinzutreten als weitere Möglichkeiten, die aufserdem noch bestehen. Da aber aufser der einen Lösung keine andere bestehen kann, so liefert diese das Minimum.

Durch diesen Beweis ist auch die eindeutige Existenz der Green'schen Function mathematisch begründet, während wir uns in § 27 mit einer Veranschaulichung begnügten. Nämlich die damals mit U' bezeichnete Function sollte an der Oberfläche des Integrationsraumes vorgeschriebene Werthe besitzen, welche durch $1/\bar{r}$ gegeben waren, und im ganzen Innenraum der Laplace'schen

9*

Differentialgleichung folgen. Das ist also ein besonderer Fall des hier behandelten Problems.

Nun haben wir weiter zu beweisen, daſs die Function φ'' im ganzen Raume auſserhalb des Conductors eindeutig bestimmt ist durch die Angaben, daſs sie erstens an der Oberfläche des Conductors einen vorgeschriebenen Verlauf hat, daſs sie zweitens überall der LAPLACE'schen Gleichung folgt, und daſs sie drittens in groſser Ferne abnimmt wie $\frac{A}{r}$, wo A eine endliche Constante ist. Der Beweis wird in ganz derselben Weise geführt, wie für den inneren Raum. Wir suchen einen stetigen Verlauf, für welchen der Ausdruck Φ ein Minimum wird, also $\delta\,\Phi$ verschwindet. Als Integrationsraum ist dabei diesmal der äuſsere Raum zu nehmen, welchen wir begrenzt denken durch eine Kugelfläche von so groſsem Radius R, daſs φ'' dort gleich A/R gesetzt werden darf. Die Variation $\delta\,\varphi''$ hat man dann sowohl an der Conductorfläche als auch an der fernen Kugelfläche $= 0$ zu setzen. Die Umformung von $\delta\,\Phi$ mittels des GREEN'schen Satzes liefert dann noch ein Oberflächenintegral über diese Kugel, welches aber ebenfalls verschwindet, so daſs sich auch hier ergiebt, daſs der Verlauf, welcher $\delta\,\Phi$ zum Verschwinden bringt zugleich der Bedingung $\Delta\,\varphi'' = 0$ genügt. Auch die Eindeutigkeit dieses Verlaufes ist ebenso zu beweisen wie vorher. Ein Umstand indessen bedarf einer besonderen Betrachtung.

Wenn von einem Minimum von Φ die Rede sein soll, so muſs Φ selbst endlich sein und bleiben, auch wenn man die ferne Kugelfläche unendlich weit hinausrückt. Nun kann man Φ selbst auch nach dem GREEN'schen Satze umformen, wie wir das bereits in § 25 gethan haben. Es ist dann:

$$\Phi = -\frac{1}{8\pi}\int\!\!\int \varphi'' \frac{\partial\,\varphi''}{\partial\,n_i}\,ds - \frac{1}{8\pi}\int\!\!\int\!\!\int \varphi''\,\Delta\,\varphi''\,d\tau\,.$$

Das Raumintegral verschwindet wegen $\Delta\,\varphi'' = 0$. Das Oberflächenintegral zerfällt in einen endlichen Theil über die Conductorfläche und einen noch fraglichen Theil über die ferne Kugelfläche. Die Flächenelemente dieser Kugel sind $ds = R^2\,d\sigma$, ferner ist dort $\varphi'' = \frac{A}{R}$ und $\frac{\partial\,\varphi''}{\partial\,n_i} = -\frac{\partial\,\varphi''}{\partial\,r} = \frac{A}{R^2}$, mithin das Kugelflächenintegral

$$= -\frac{1}{8\pi}\int\!\!\int \frac{A^2}{R^3}\,R^2\,d\sigma = -\frac{A^2}{2R}\,.$$

Dies verschwindet aber für $R = \infty$, und Φ reducirt sich auf das Integral über die Conductoroberfläche, ist mithin endlich. Der Ausdruck Φ, integrirt über den ganzen Raum, sowohl den inneren im Conductor, wie den äufseren, stellt, wie wir schon früher erwähnten, die elektrische Energie dar derjenigen Flächenbelegung, von welcher das Potential φ'' herrührt, und wir haben jetzt gesehen, dafs die Gleichgewichtsbedingungen zu demjenigen Verlauf führen, für welchen Φ ein Minimum ist, sowohl innen wie aufsen. Dadurch sind die Gleichgewichtszustände, ebenso wie die der Mechanik an ein Minimum der potentiellen Energie, hier an ein Minimum der elektrischen Energie geknüpft.

Von der abgespaltenen Potentialfunction φ''' haben wir nur zu sagen, dafs ihre Auffindung ein besonders einfacher Specialfall des hier bereits behandelten ist. Es soll φ''' so bestimmt werden, dafs es in dem Conductor einen constanten Werth hat (auf der „Oberfläche des Conductors“ würde genügen) im ganzen Raum der Bedingung $\Delta \varphi''' = 0$ folgt und in grofser Entfernung verschwindet reciprok dem Abstand.

Hiermit ist der mathematische Nachweis geführt, dafs es stets eine und nur eine Gleichgewichtsvertheilung auf einem Conductor giebt, der in ein gegebenes äufseres Feld gebracht wird. In den Fällen, wo es gelingt, die Function $\varphi' = \varphi'' + \varphi'''$ explicite zu berechnen, findet man die Oberflächenbelegung ε' des Conductors dann aus der uns schon bekannten Formel

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}\right) + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n_a}\right) = -\,4\pi\varepsilon'.$$

Zweites Kapitel.

Theorie der elektrischen Bilder.

§ 31. Kugelförmige Conductoren. Zwei Methoden zur Auffindung des elektrischen Gleichgewichts.

Der im vorigen Paragraphen gelieferte Nachweis giebt keinen Weg an, wie man im einzelnen Falle die Vertheilung der Elektricität auf dem Leiter und das dazu gehörige Potential finden kann. Solche Wege zur vollständigen Lösung des Problems hat man nur für einzelne besonders einfache Gestalten des Leiters gefunden. Für die Kugelgestalt aber besitzen wir zwei verschiedene Methoden, die

zum Ziel führen und je nach der Stellung der Aufgabe ihre verschiedenen Vorzüge bieten. Die eine Methode, die wir zuerst betrachten wollen, und welche namentlich dann von Nutzen ist, wenn das äufsere influenzirende Feld durch festliegende bekannte elektrische Quanta angegeben wird, ist gegründet auf die Theorie der elektrischen Bilder, einer reciproken Abbildung der äufseren festen Ladungen durch ein System von inneren nur gedachten Ladungen, deren Wirkung im äufseren Raum aber diejenige der entstehenden Gleichgewichtsvertheilung vollkommen ersetzt. Durch das Princip dieser Abbildungen gelingt es dann noch weiter, aus bekannten Gleichgewichtsvertheilungen neue abzuleiten.

Die andere Methode, welche bei beliebig vorgeschriebenem Potential des influenzirenden Feldes den Vorzug verdient, benützt die Theorie der Kugelfunctionen. Durch eine Summe — eventuell eine unendliche convergirende Reihe — solcher Kugelfunction kann man erstens jeden beliebigen Werthverlauf auf einer Kugelfläche darstellen, zweitens aber kann man diese Functionen so in den äufseren oder inneren Raum der Kugel fortsetzen, dafs sie dort der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen.

In dem einfachsten Falle, in welchem kein äufseres influenzierndes Feld vorhanden ist, sondern nur ein isolirter kugelförmiger Conductor, welchem eine gewisse Ladung mitgetheilt ist, kann man die Gleichgewichtsvertheilung ohne Weiteres errathen. Wegen der allseitigen Symmetrie der Kugel mufs sich die Ladung mit gleichmäfsiger Dichtigkeit über die ganze Oberfläche vertheilen. Bezeichnet R den Radius der leitenden Kugel, $\mathfrak{e}$ die Gesammtladung, so ist die gleichförmige Oberflächendichtigkeit e

$$e = \frac{\mathfrak{e}}{4\pi R^2}. \tag{93}$$

Es ist also hier diejenige Vertheilung realisirt, welche bereits in § 15 betrachtet wurde. Das von ihr ausgehende Feld besitzt im äufseren Raum das Potential

$$\varphi_a = \frac{\mathfrak{e}}{r} = \frac{4\pi R^2 e}{r} \text{ für } r > R, \tag{93a}$$

im inneren den constanten Werth

$$\varphi_i = \frac{\mathfrak{e}}{R} = 4\pi R e. \tag{93b}$$

Wenn in diesem Falle umgekehrter Weise das Potential φ_i angegeben ist bis zu welchem die Kugel geladen ist, so berechnet man daraus die erforderliche Ladungsmenge

$$\mathfrak{e} = R \cdot \varphi_i \tag{93c}$$

und die sich bildende Flächendichtigkeit

$$e = \frac{\varphi_i}{4\pi R}. \tag{93d}$$

Damit ist das Gleichgewichtsproblem für diesen einfachsten Fall vollständig gelöst.

Die Gleichung (93c) ist ein besonderer Fall einer für jeden beliebig gestalteten Conductor gültigen Beziehnng zwischen seiner Gesammtladung und dem dadurch hervorgebrachten Potentialwerth. Stellt man nämlich irgend einen isolierten Conductor für sich allein in den Raum und beladet ihn der Reihe nach mit verschiedenen Quantis $\mathfrak{e}$, so bilden sich dabei um ihn herum Felder von verschiedener Stärke, aber immer von der gleichen Gestalt der Niveauflächen aus. Die Potentialwerthe sind überall, mithin auch auf und in dem Conductor, proportional der Ladung. Es gilt deshalb die Gleichung

$$\mathfrak{e} = C \cdot \varphi_i. \tag{93e}$$

Den Proportionalitätsfactor C, welcher die Dimension einer Länge hat, nennt man die Capacität des Conductors. Für kugelförmige Conductoren ist nach Gleichung (93c) die Capacität gleich dem Kugelradius.

§ 32. Elektrisches Bild eines geladenen Punktes in Bezug auf eine Kugel.

Wir stellen uns jetzt vor, dafs das äufsere Feld, in welches die leitende Kugel hineingebracht werden soll, von einer einzigen Punktladung herrührt, welche die Elektricitätsmenge $\mathfrak{e}$ trägt. Das Potential ist dann für das noch nicht durch den Leiter gestörte Feld:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{e}}{r}, \tag{94}$$

wo r den Abstand von dem geladenen Punkt bezeichnet. Die leitende Kugel, vom Radius R, werde so aufgestellt, dafs ihr Centrum den Abstand p von jenem Punkt hat. Es mufs dann $p > R$ sein. Ob die Kugel von vorn herein mit einer überschüssigen Ladung ver-

sehen ist, oder nicht, können wir zunächst unbestimmt lassen. Jedenfalls mufs sich auf ihr eine Vertheilung herstellen, welche allein ohne den Punkt $\mathfrak{e}$ ein Feld erzeugt, dessen Potential φ' dadurch bestimmt ist, daß auf der ganzen Kugelfläche (und folglich auch im ganzen inneren Kugelraum) die Bedingung

$$\varphi + \varphi' = \text{Constans} \tag{95}$$

erfüllt ist, wie dies für jede Gestalt des Conductors gelten mufs. Auch die Trennung des Potentials φ' in zwei Theile $\varphi' = \varphi'' + \varphi'''$, entsprechend einer Superposition zweier besonderer Flächenbelegungen können wir, wie im allgemeinen Falle, vornehmen und für die einzelnen Theile verlangen:

$$\varphi + \varphi'' = 0 \tag{95 a}$$

$$\varphi''' = \text{Constans.} \tag{95 b}$$

Zunächst suchen wir das Potential φ''. Dazu hilft uns ein bekannter geometrischer Satz:

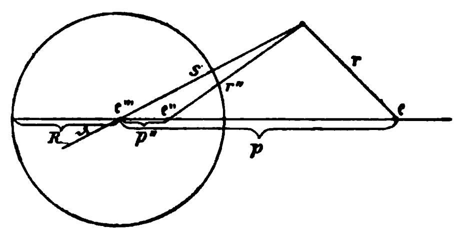


Fig. 7.

Zeichnet man (Figur 7) auf dem Strahle vom Kugelcentrum nach dem äufseren geladenen Punkte $\mathfrak{e}$ denjenigen innerhalb gelegenen Punkt, dessen Abstand p'' durch die Relation

$$p \cdot p'' = R^2 \tag{96}$$

bestimmt ist, so haben die Abstände r und r'' aller Kugelflächenelemente von dem äufseren und von dem inneren Punkte das gleiche Längenverhältnifs. Den Werth dieses Verhältnisses kann man bequem ablesen an den beiden Polen der Kugelfläche, welche in gerader Linie mit den beiden Punkten liegen. Für diese ist

$$r = p \mp R \quad \text{und} \quad r'' = R \mp p''.$$

Mithin ist für jede beliebige Stelle der Kugelfläche:

$$\frac{r}{r''} = \frac{p \mp R}{R \mp p''} = \frac{p \mp R}{R \mp \frac{R^2}{p}} = \frac{p}{R}.$$

Diese Gleichung kann man auch so schreiben:

$$\frac{1}{r} - \left(\frac{R}{p}\right) \cdot \frac{1}{r''} = 0$$

oder nach Erweiterung mit dem Werthe der Punktladung e:

$$\frac{e}{r} + \frac{\left(-\frac{R}{p}e\right)}{r''} = 0. \tag{97}$$

Der erste Summand giebt das Potential φ der äufseren Punktladung, der zweite Summand hat ebenfalls die Form des Potentials einer Punktladung. Diese mufs in dem innerhalb gelegenen reciproken Bildpunkte gedacht werden, ihre Stärke ist

$$e'' = -\frac{R}{p} e \tag{97a}$$

oder nach Elimination von R mittels Gleichung (96)

$$e'' = -\sqrt{\frac{p''}{p}} \cdot e, \tag{97b}$$

also von entgegengesetztem Vorzeichen und geringerem Betrage als die wirkliche äufsere Ladung e. Wir nennen sie das elektrische Bild von e in Bezug auf die Kugel. Diese Punktladung e'' ist nicht reell vorhanden, das Bild ist ein virtuelles, um einen in der Optik gebräuchlichen Ausdruck zu gebrauchen. Uebrigens stimmt die Lage von e'' nicht etwa mit der des virtuellen optischen Bildes in der spiegelnden Kugel überein. Durch die Auffindung der Gleichung (97) haben wir nun sofort die Bedingung (95 a) befriedigt. Wir brauchen nur im äufseren Raume bis an die Kugelfläche heran zu setzen:

$$\varphi_a'' = \left(-\frac{R}{p} e\right) \cdot \frac{1}{r''}, \tag{98}$$

im Innern der Kugel aber

$$\varphi_i'' = -\frac{e}{r}, \tag{98a}$$

so haben wir ein Potential φ'' gefunden, welches allen Bedingungen genügt; und da wir wissen, dafs es nur eine eindeutige Lösung geben kann, so ist es diese hier. Die beiden Functionsformen (98) und (98 a) gehen an der Kugelfläche stetig in einander über zufolge Gleichung (97), aber die Differentialquotienten nach der Normale

an der Kugelfläche sind unstetig, aus der Gröfse ihres Sprunges kann man die Flächendichtigkeit der Belegung erkennen, von welcher das Potential φ'' herrührt.

Es mag nebenbei bemerkt sein, dafs durch die soeben gefundenen Potentiale zugleich auch die sogenannte GREEN'sche Function, von welcher in § 27 die Rede war, für den Fall einer kugelförmigen Begrenzung des dort betrachteten Integrationsraumes gegeben ist. Wir brauchen nur in dem inneren Punkte die Ladung $e'' = 1$ anzunehmen und dem entsprechend nach Gleichung (97 a) in dem äufseren Punkte die Ladung $e = -\frac{p}{R}$, so genügt die Function:

$$U = \frac{1}{r''} - \frac{\frac{p}{R}}{r} = \frac{1}{r''} - \frac{p}{Rr} \tag{99}$$

allen Bedingungen, welche wir an die GREEN'sche Function stellten, denn sie wird in einem inneren Punkte unendlich, wie der reciproke Abstand $1/r''$, ist an der ganzen Oberfläche gleich Null [nach Gleichung (97)], und folgt mit Ausnahme der Unendlichkeitsstelle im ganzen Kugelraum der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

Nach dieser Abschweifung auf ein früher behandeltes Gebiet kehren wir zu unserem Gleichgewichtsproblem auf der leitenden Kugel unter Anwesenheit eines influenzirenden äufseren geladenen Punktes zurück und finden da noch die zweite Bedingung (95 b) zu befriedigen.

Dieses Potential φ''' kann nur von einer gleichförmigen Belegung der Kugelfläche herrühren, deren Gesammtmenge wir mit e''' bezeichnen. Im äufseren Raume wirkt diese wie eine Punktladung e''' des Kugelcentrums, im inneren Raume erzeugt sie überall den constanten Potentialwerth, welchen das äufsere Potential an der Fläche selbst annimmt. Nennen wir also s den Abstand eines beliebigen Raumortes vom Kugelcentrum, so ist aufsen:

$$\varphi_a''' = \frac{e'''}{s} \tag{100}$$

und innen

$$\varphi_i''' = \frac{e'''}{R}. \tag{100 a}$$

Das gesammte Potential in dem aufserhalb der Kugel liegenden Raume ist demnach

$$\varphi_a = \frac{e}{r} + \frac{\left(-\frac{R}{p}e\right)}{r''} + \frac{e'''}{s}, \tag{101}$$

während es im Inneren der Kugel allein durch (100 a) bestimmt wird.

Bezeichnet man den Winkel zwischen dem Strahle s und der gemeinsamen Richtung der beiden Strahlen p und p'' mit ϑ, so kann man Gleichung (101) ausführlicher schreiben:

$$\varphi_a = \frac{e}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps\cos\vartheta}} - \frac{\frac{R}{p}e}{\sqrt{\frac{R^4}{p^2} + s^2 - 2\frac{R^2 s}{p}\cos\vartheta}} + \frac{e'''}{s} \tag{101a}$$

oder nach einer leichten Umformung des zweiten Gliedes:

$$\varphi_a = \frac{e}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps\cos\vartheta}} - \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2 s^2}{R^2} - 2ps\cos\vartheta}} + \frac{e'''}{s}. \tag{101b}$$

Wichtig für die Beurtheilung der Flächendichtigkeit auf der Kugel ist der nach der Variabelen s genommene Differentialquotient von φ_a, weil die Richtung des wachsenden s normal auf der Kugelfläche steht. Man findet aus (101b):

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial s} = -\frac{e(s - p\cos\vartheta)}{\sqrt{p^2 + s^2 - 2ps\cos\vartheta}^3} + \frac{e\left(\frac{p^2}{R^2}s - p\cos\vartheta\right)}{\sqrt{R^2 + \frac{p^2 s^2}{R^2} - 2ps\cos\vartheta}^3} - \frac{e'''}{s^2}, \tag{102}$$

anderseits ist natürlich $\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} = 0$. Bildet man also den Ausdruck (102) für den Werth $s = R$, also dicht an der Kugelfläche, so mufs er den Werth von $-4\pi\varepsilon$ darstellen als Function des Polarwinkels ϑ. Man findet

$$4\pi\varepsilon = -\frac{e(p^2 - R^2)}{R\cdot\sqrt{R^2 + p^2 - 2Rp\cos\vartheta}^3} + \frac{e'''}{R^2}. \tag{103}$$

Wir wollen zwei besondere Fälle hervorheben.

1. Die leitende Kugel sei durch einen dünnen Draht mit der Erde verbunden, so dafs auf ihr und in ihr das Potential Null herrscht. Dann ist in Gleichung (95), folglich auch in (95b) die Constante gleich Null, mithin auch

$$e''' = 0.$$

Die Belegung der Kugel wirkt dann im äufseren Raume so, wie der reciproke Bildpunkt allein ohne Ladung des Mittelpunktes. Die Flächenbelegung wird dann nach (103) auf allen Zonen der Kugel negativ, am stärksten für $\vartheta = 0$, am schwächsten für $\vartheta = \pi$. Man sagt dem entsprechend im gewöhnlichen Sprachgebrauch, die Nähe des positiv geladenen Punktes e ziehe aus der Erde durch den Draht ein gewisses Quantum negativer Elektricität auf die Kugelfläche. Die herangezogene Menge ist die virtuelle Ladung des Bildpunktes, also gleich $-\frac{R}{p}e$. Dasselbe findet man auch, wenn man den durch das erste Glied rechts der Gleichung (103) gegebenen Ausdruck der Flächendichtigkeit über sämmtliche Zonen der Kugel integrirt.

2. Die leitende Kugel sei isolirt und ohne überschüssige Ladung, so dafs die Summe der durch Influenz getrennten Elektricitäten auf ihr gleich Null ist. Dann muß auch die Summe der jene Flächenbelegungen ersetzenden inneren virtuellen Punkte gleich Null sein, $e'' + e''' = 0$, oder nach Gleichung (97a):

$$e''' = +\frac{R}{p}e. \tag{104}$$

Die durch Influenz getrennten Flächenbelegungen auf der Kugel wirken dann im äufseren Raume, wie ein Paar engegengesetzt gleicher Punktladungen von der Gröfse $\frac{R}{p}e$; die positive liegt im Centrum, die negative im reciproken Bildpunkt der äufseren Ladung e. Das Potential, welches nach Eintritt des Gleichgewichtes in der ganzen Kugel herrscht, findet man aus Gleichung (100a) unter Hinblick auf (104):

$$\varphi_i = +\frac{e}{p}; \tag{104 a}$$

es ist also eben so grofs, wie es am Orte des Kugelcentrums war, bevor die leitende Kugel in das Feld der Punktladung e gebracht wurde. Von Interesse ist die Vertheilung der Flächendichtigkeit ε in diesem Falle. Die Gleichung (103) liefert, wenn man zur Abkürzung

$$\sqrt{R^2 + p^2 - 2Rp\cos\vartheta} = r$$

setzt, unter Hinblick auf (104):

$$4\pi\varepsilon = -\frac{e(p^2 - R^2)}{Rr^3} + \frac{e}{Rp} = \frac{e}{R}\cdot\frac{r^3 - p(p^2 - R^2)}{r^3 p}. \tag{104b}$$

Dieser Ausdruck ist für den der äufseren Ladung e zugekehrten Kugelpol negativ, denn dort ist $r = (p - R)$, also

$$(4\pi e)_{\vartheta=0} = \frac{e}{R}\cdot\frac{(p-R)^3 - p(p^2 - R^2)}{p\cdot(p-R)^3} = -\frac{e\cdot(3p-R)}{p\cdot(p-R)^2}\cdot \qquad (104\,\mathrm{c})$$

An dem abgekehrten Kugelpol ist e positiv, denn dort ist $r = p + R$, also

$$(4\pi e)_{\vartheta=\pi} = \frac{e}{R}\cdot\frac{(p+R)^3 - p(p^2 - R^2)}{p\cdot(p+R)^3} = +\frac{e\cdot(3p+R)}{p\cdot(p+R)^2}\cdot \qquad (104\,\mathrm{d})$$

Dazwischen, auf einem Parallelkreise von bestimmtem Winkel ϑ, mufs der Zeichenwechsel der Belegung stattfinden. Dort mufs $e = 0$ sein, man findet also für den zugehörigen Abstand $r = \bar{r}$ aus (104 b) die Bedingung

$$\bar{r}^3 = p(p^2 - R^2) \qquad (104\,\mathrm{e})$$

unabhängig von der Stärke der äufseren Punktladung.

Die Länge t der Tangente vom geladenen Punkt an die Kugel ist gegeben durch

$$t^2 = p^2 - R^2;$$

es ist also

$$t^3 = t\cdot(p^2 - R^2).$$

Nun ist immer $t < p$, folglich lehrt der Vergleich dieses Ausdruckes für t^3 mit demjenigen für $\bar{r}^3$ in (104 e), dafs immer $\bar{r} > t$ ist. Das Gebiet der negativen Belegung erstreckt sich also etwas weiter als die vom äufseren Punkt e aus sichtbare Calotte der Kugel. Bei großer Entfernung freilich nähern sich beide Calotten der halben Kugeloberfläche.

§ 33. Elektrische Bilder in Bezug auf unendliche leitende Ebenen.

Läfst man den Radius R der leitenden Kugel über alle Grenzen wachsen, während der dem äufseren Punkt zugekehrte Pol der Kugel unveränderte Lage behält, so wächst auch p über alle Grenzen, das Verhältnifs R/p nähert sich dem Werthe 1, während $p - R = h$ einen festen endlichen Werth behält. Die Kugelfläche geht dann in eine unendliche Ebene über, der Bildpunkt von $+e$ nimmt die Stärke $-e$ an und rückt ebenfalls in den Abstand h auf der anderen Seite der Ebene, so dafs sich in diesem Falle das elektrische Bild mit virtuellen optischen Bilde hinter einem ebenen Spiegel deckt (Figur 8).

Das Potential der bis in's Unendliche reichenden leitenden Ebene mufs Null sein, und derselbe Werth herrscht jenseits hinter der Ebene. Vor ihr aber ist

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \tag{105}$$

in einem Punkte, welcher von der reellen Ladung den Abstand r, von deren virtuellem Bild den Abstand r' besitzt. Legen wir die x-Achse durch e senkrecht zur leitenden Ebene, den Nullpunkt in diese Ebene, die positive Richtung nach e hin und bezeichnen den seitlichen Abstand des Punktes, in welchem wir φ angeben wollen, von der x-Achse mit y, so ist

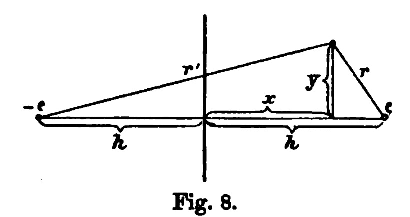


Fig. 8.

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(h-x)^2 + y^2}} - \frac{e}{\sqrt{(h+x)^2 + y^2}} \tag{105 a}$$

folglich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{e(h-x)}{\sqrt{(h-x)^2 + y^2}^3} + \frac{e(h+x)}{\sqrt{(h+x)^2 + y^2}^3}.$$

Dies wird hart an der Ebene $x = 0$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=+0} = \frac{2eh}{\sqrt{h^2+y^2}^3}.$$

Auf der anderen Seite der belegten Fläche ist $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=-0} = 0$. Daher ist die Flächendichtigkeit ε gegeben durch

$$4\pi\varepsilon = -\frac{2eh}{\sqrt{h^2+y^2}^3} = -\frac{2e}{h^2}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+y^2}}\right)^3 = -\frac{2e}{h^2}\cos^3\alpha. \tag{105 b}$$

Im letzten Ausdruck bedeutet α den Winkel, unter welchem der Strahl vom geladenen Punkt nach dem influenzirten Flächenelement, in welchem die Dichtigkeit ε herrscht, gegen die negative x-Richtung geneigt ist. Man sieht, dafs mit wachsendem Winkel α die Dichtigkeit der überall negativen Belegung der Ebene rasch abnimmt. Man braucht defshalb in der Praxis, um die hier berechneten Verhältnisse zu verwirklichen, keine unendlich grofse leitende Ebene, sondern es genügt ein zur Erde abgeleiteter ebener Metallschirm, dessen Linearmaafse nur grofs gegenüber dem Abstand h sind.

Auch das elektrische Feld einer Punktladung in einem Raume, welcher durch zwei rechtwinklig zusammenstoſsende ebene Metallwände abgeschlossen ist (Raumquadrant), kann man mit Hülfe der Spiegelbilder leicht angeben (Figur 9). Es sind dazu erstens die beiden Spiegelbilder nöthig, welche sich auf die beiden einzelnen jenseits der Kante bis ins Unendliche fortgesetzt gedachten Ebenen beziehen; diese beiden haben jedes die Stärke $-e$. Ferner aber ist in dem vierten Quadranten noch ein virtueller Bildpunkt von der Stärke $+e$ nöthig. Das Feld dieser vier Punktladungen ist in dem Raumquadranten zwischen den beiden Metallwänden identisch mit dem thatsächlich dort herrschenden. Hinter dem Eckschirm, d. h. auf dessen convexer Seite herrscht in Wirklichkeit überall das Potential Null, dort gelten also die Felder der virtuellen Bildpunkte nicht.

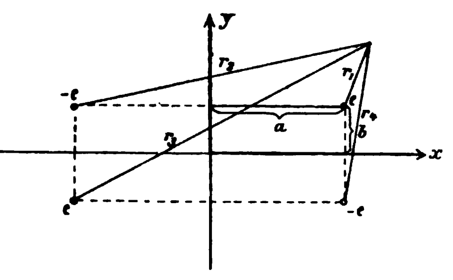


Fig. 9.

Nehmen wir die Ebene, in welcher die reelle Punktladung und ihre drei Spiegelbilder liegen, zur x-, y-Ebene, die Schnitte der beiden Metallwände zur positiven x- und y-Axe, die Kante (senkrecht zum Papier in Figur 9) zur z-Axe, und numeriren wir der Reihe nach die Abstände eines Raumpunktes (x, y, z) von den vier Punktladungen mit $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$, so ist das Potential für positive x und y

$$\varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} + \frac{e}{r_3} - \frac{e}{r_4}. \tag{106}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2} \qquad & r_3 &= \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2} \qquad & r_4 &= \sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2} \end{aligned}\right\} \tag{106 a}$$

wobei a, b, 0 die Coordinaten des geladenen Punktes sind.

Daraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{e(x-a)}{r_1^3} + \frac{e(x+a)}{r_2^3} - \frac{e(x+a)}{r_3^3} + \frac{e(x-a)}{r_4^3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{e(y-b)}{r_1^3} + \frac{e(y-b)}{r_2^3} - \frac{e(y+b)}{r_3^3} + \frac{e(y+b)}{r_4^3}.$$

Von besonderem Interesse sind die Werthe dieser Differentialquotienten an den beiden Metallwänden selbst.

Für $x = 0$ wird $r_2 = r_1$ und $r_3 = r_4$, mithin:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=+0} = \frac{2ea}{r_1^3} - \frac{2ea}{r_4^3} = 2ea \cdot \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_4^3}\right) > 0 .$$

Für $y = 0$ wird $r_4 = r_1$ und $r_3 = r_2$, mithin: (106b)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=+0} = \frac{2eb}{r_1^3} - \frac{2eb}{r_2^3} = 2eb \cdot \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) > 0 .$$

Daraus kann man die influenzirten überall negativen Flächenbelegungen der beiden Schirmwände ablesen, denn hinter dem Schirm ist $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=-0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=-0} = 0$, also geben die vorstehenden beiden Ausdrücke direct die Werthe von $-4\pi\varepsilon$. Man bemerkt, dafs die Dichtigkeit in der concaven Kante auf Null herunter geht, weil dort $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ wird. Auch läfst sich zeigen, dafs die maximale Dichtigkeit auf beiden Wänden nicht normal vor der Punktladung, sondern etwas verschoben in der Richtung aus der Ecke heraus zu finden ist.

In gleicher Weise lassen sich die analogen Probleme für zwei Wände, welche einen Winkel von $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \ldots$ etc. einschliefsen, behandeln. Die Felder in den immer enger werdenden Raumfächern zwischen den zwei leitenden Wänden lassen sich durch 6, 8, ...

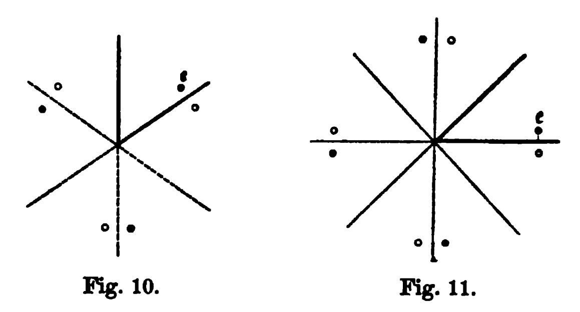


Fig. 10. Fig. 11.

gleich stark und paarweise entgegengesetzt geladene Punkte (zu denen auch der eine reelle gehört) darstellen. Die Figuren 10 und 11 mögen zur Anschauung genügen. Sobald aber der Winkel nicht ein einfacher Bruchtheil von π ist, versagt diese Methode, denn man müfste dann unzählig viele Bildpunkte berücksichtigen, welche alle auf einem Kreis um die Schnittkante der beiden Wände angeordnet liegen.

Endlich wollen wir das Feld betrachten, welches ein geladener Punkt zwischen zwei parallelen leitenden Wänden hervorruft. Auch

hier sind unzählig viele Spiegelbilder nach beiden Seiten hin zu Hülfe zu nehmen, wie Figur 12 veranschaulicht. Diese sind auch alle von gleicher Stärke und abwechselndem Vorzeichen und liegen auf derselben geraden Linie senkrecht zu den Wänden. Darum kann man das Potential in dem Raum zwischen den beiden Parallelebenen nur in Form unendlicher convergenter Reihen darstellen, deren einzelne Glieder mit abwechselnden Vorzeichen die Ladung $\pm e$ des Bildes, dividirt durch den wachsenden Abstand eines beliebigen Punktes im Zwischenraum von dieser Bilderreihe bildet. Für Punkte in der Axe sind diese Reihen am einfachsten: Der geladene Punkt und die Bilderreihe mögen auf der x-Axe liegen, deren Nullpunkt

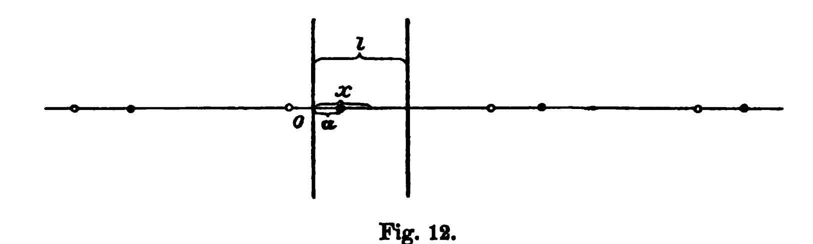


Fig. 12.

in der leitenden Ebene links. Der geladene Punkt habe die Abscisse a und der Abstand der Parallelebene sei l. Dann ist das Potential in einem Punkte zwischen den Ebenen $(0 < x < l)$

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \frac{e}{|x-a|} &+ \frac{e}{2l+a-x} + \frac{e}{4l+a-x} + \frac{e}{6l+a-x} + \dots \\ &- \frac{e}{2l-a-x} - \frac{e}{4l-a-x} - \frac{e}{6l-a-x} - \dots \\ &+ \frac{e}{2l-a+x} + \frac{e}{4l-a+x} + \frac{e}{6l-a+x} + \dots \\ - \frac{e}{a+x} &- \frac{e}{2l+a+x} - \frac{e}{4l+a+x} - \frac{e}{6l+a+x} - \dots\end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$\frac{x-a}{2l} = \alpha, \qquad \frac{x+a}{2l} = \beta, \qquad (107\text{a})$$

wo α und β stets echte Brüche sind, so kann man den vorstehenden Ausdruck folgendermaafsen schreiben:

$$\varphi = \frac{e}{|x-a|} - \frac{e}{a+x}$$

$$+ \frac{e}{2l} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{3-\alpha} + \ldots \\ -\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{2-\beta} - \frac{1}{3-\beta} - \ldots \\ +\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{2+\alpha} + \frac{1}{3+\alpha} + \ldots \\ -\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{2+\beta} + \frac{1}{3+\beta} + \ldots \end{array} \right\} \qquad (107\text{b})$$

Die positiven Glieder dieser vier unendlichen Reihen sowie die negativen Glieder bilden für sich allein divergente Reihen, deren Werthe unendlich werden. Wenn man aber die positiven und negativen Glieder von gleicher Ordnungszahl zusammenfafst, so erhält man eine convergente Reihe von bestimmtem Werthe, also eine endliche Function von x. Solche bedingt convergente Reihen mit abwechselndem Vorzeichen, deren Summenwerth durchaus von der Reihenfolge der Zusammenfassung abhängt, kann man zur Darstellung physikalischer Functionen nur dann brauchen, wenn für die Art der Reihenfolge der Glieder ein innerer Grund vorliegt. Das ist nun hier der Fall. Wenn man nämlich zur Auffindung der successiven Spiegelbilder schreitet, so kommt man zu immer entfernteren Punkten von immer schwächerem Einflufs, so dafs man nach einer hinreichenden Menge von Bildpunkten abbrechen darf. Dann hat man aber immer ebensoviel positive wie negative Bildpunkte zu berücksichtigen und defshalb ist die Zusammenfassung der Paare von gleicher Ordnungszahl die einzig gerechtfertigte.

§ 34. Influenzirung einer leitenden Kugel durch ein festes äufseres Ladungsgebilde. Zwei leitende Kugeln.

In § 32 haben wir nur das reciproke Bild eines einzigen geladenen Punktes in Bezug auf eine Kugel gesucht. Zunächst ist klar, dafs eine feste Gruppirung von mehreren äufseren Punktladungen eine nach der Regel der reciproken Abbildung aufzufindende Gruppe von inneren Bildpunkten mit entgegengesetzten und im jeweiligen Verhältnifs $\frac{R}{p}$ oder $\sqrt{\frac{p'}{p}}$ reducirten Ladungen besitzt, mit deren Hülfe man das elektrische Feld darstellen kann, welches

die festen äufseren Ladungen zusammen mit der Influenzvertheilung auf der leitenden Kugel im äufseren Raume erzeugen. Man kann auch zu continuirlich verbreiteten auf Linien, Flächen oder in Räumen festliegenden Ladungen übergehen und deren reciproke Bilder in der Kugel aufsuchen zum Zweck der Felddarstellung im Aufsenraum. Bedingung ist dabei nur, dafs die Influenzladung der leitenden Kugel nicht wieder rückwärts vertheilend auf die äufseren Ladungen wirkt. Letztere müssen also entweder auf sehr kleinen getrennten Körpern, oder aber auf vollkommenen Isolatoren befindlich gedacht werden. Wie die Bilder der einfachsten geometrischen Objecte gestaltet sind, werden wir im nächsten Paragraphen ausführen.

Ein Beispiel, in welchem man das Feld zwischen zwei influenzirbaren Leitern durch eine Reihe von successiven Bildern finden kann, bilden zwei Kugeln, deren eine vom Radius R_1 wir uns zur Erde abgeleitet denken, während wir die andere vom Radius R_2 isolirt und mit der positiven Menge e_0 beladen annehmen. Der Abstand beider Kugelcentra sei p_0. Die Kugeln sollen sich ausschliefsen, also $p_0 > R_1 + R_2$. Man kann dann folgende Reihe von Ueberlegungen anstellen, welche Anwendungen der beiden Sonderfälle des § 32 sind.

1. Zunächst wirkt die geladene Kugel 2 wie eine Punktladung e_0 in ihrem Centrum. Deren Bild in der Kugel 1 hat die Stärke

$$e_1 = -\frac{R_1}{p_0} e_0 \tag{108}$$

und liegt auf der Centrallinie im Abstand

$$p_1 = \frac{R_1^2}{p_0} \tag{108a}$$

vom Centrum der Kugel 1.

2. Diese Ladung e_1 wirkt rückwärts influenzirend auf die isolirte Kugel 2. Diese Rückwirkung wird dargestellt durch das Bild von e_1 in der Kugel 2 von der Stärke

$$e_2 = -\frac{R_2}{p_0 - p_1} e_1 = +\frac{R_1 R_2}{p_0 (p_0 - p_1)} e_0 \tag{108b}$$

im Abstand

$$p_2 = \frac{R_2^2}{p_0 - p_1} \tag{108c}$$

vom Centrum der Kugel 2. Aufserdem kommt aber in deren Centrum selbst noch die Punktladung $-\mathfrak{e}_2$ hinzu, da diese Kugel isolirt und von der Gesammtladung $\mathfrak{e}_0$ bleiben mufs.

3. Die beiden Punkte $\mathfrak{e}_2$ und $-\mathfrak{e}_2$ erzeugen wieder zwei Bilder in der Kugel 1. Das Bild des ersten hat die Stärke

$$\mathfrak{e}_3 = -\frac{R_1}{p_0 - p_2}\,\mathfrak{e}_2 = -\frac{R_1^2 \cdot R_2}{p_0(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)}\,\mathfrak{e}_0 \qquad (108\text{d})$$

und liegt im Abstand

$$p_3 = \frac{R_1^2}{p_0 - p_2}. \qquad (108\text{e})$$

Das Bild des zweiten fällt örtlich mit $\mathfrak{e}_1$ zusammen und hat die Stärke

$$\mathfrak{e}_3' = +\frac{R_1}{p_0}\,\mathfrak{e}_2 = \frac{R_1^2 R_2}{p_0^2(p_0 - p_1)}\,\mathfrak{e}_0. \qquad (108\text{f})$$

4. Es sind die Bilder von $\mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{e}_3'$ in der Kugel 2 zu bilden. Diese sind

$$\mathfrak{e}_4 = -\frac{R_2}{p_0 - p_3}\,\mathfrak{e}_3 = +\frac{R_1^2 R_2^2}{p_0(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)(p_0 - p_3)}\,\mathfrak{e}_0 \quad (108\text{g})$$

im Abstand

$$p_4 = \frac{R_2^2}{p_0 - p_3} \qquad (108\text{h})$$

und

$$\mathfrak{e}_4' = -\frac{R_2}{p_0 - p_1}\,\mathfrak{e}_3' = -\frac{R_1^2 R_2^2}{p_0^2(p_0 - p_1)(p_0 - p_2)}\,\mathfrak{e}_0 \qquad (108\text{i})$$

im Abstand p_2, also zusammenfallend mit $\mathfrak{e}_2$.

Aufserdem kommt im Centrum der isolirten Kugel noch die Punktladung $-(\mathfrak{e}_4 + \mathfrak{e}_4')$ hinzu. Von diesen drei Punkten sind dann wieder die Bilder in der Kugel 1 zu suchen. Zwei derselben $\mathfrak{e}_5'$ und $\mathfrak{e}_5''$ fallen über die dort bereits vorhandenen Punkte $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_3$, während $\mathfrak{e}_5$, das Bild von $\mathfrak{e}_4$, einen neuen Ort im Abstand p_5 einnimmt. In dieser Weise hat man fortzufahren. Die Abstände der neuen Bildpunkte von den Centren werden zwar gröfser, aber die Bildpunkte rücken dichter und dichter zusammen und sie kommen über zwei gewisse Grenzen $p_{1\infty}$ und $p_{2\infty}$, welche in beiden Kugeln merklich $< R_1$ resp. $< R_2$ bleiben, nie hinaus. Die Stärke der Punktladungen aber nimmt successive ab, weil jede folgende aus der vorigen durch Multiplikation mit einem echten Bruch hervorgeht,

welcher kleiner als $\frac{R_1}{p_{1\infty}}$ resp. $\frac{R_2}{p_{2\infty}}$ ist, und weil die über einander fallenden Bilder überdies immer im Zeichen wechseln.

Wenn der Abstand p_0 einigermaafsen grofs gegen beide, oder auch nur gegen einen der beiden Radien ist, so convergiren die Summen sehr schnell und man kann sich mit einer geringen Anzahl der ersten Glieder der successiven Bilderreihe begnügen. Wenn sich aber die Kugeln fast berühren, so convergiren die Reihen sehr langsam, und man mufs zu ihrer Berechnung besondere mathematische Kunstgriffe anwenden. Die Theorie dieses Problems wurde von G. Kirchhoff (Crelle's Journ. 59) vollständig durchgeführt.

§ 35. Reciproke Bilder der einfachsten geometrischen Objecte. Winkeltreue oder Aehnlichkeit der kleinsten Theilchen in Bild und Object.

Bevor wir zu einer neuen Anwendung der reciproken Bilder für die Theorie der Elektrostatik auf leitenden Oberflächen übergehen, ist es nützlich, die einfachsten Fälle der Object- und Bildgestalten und ein allgemeines Gesetz dieser Abbildung zu betrachten. Der Uebersichtlichkeit der Figuren wegen wollen wir dabei immer die Objecte ganz aufserhalb der abbildenden Kugel, die Bilder also ganz im Innenraum annehmen, obwohl diese Beschränkung nicht im Wesen der Sache liegt. Es gelten dieselben Gesetze auch für Gebilde, welche theils aufserhalb, theils innerhalb der Kugelfläche liegen, deren Bilder defshalb theils nach innen, theils nach aufsen fallen.

1. Bild einer Ebene. In Figur 13 ist ein Kreis um den Mittelpunkt 0 geschlagen. Dessen Radius sei $OS = R$. Aufserhalb läuft eine gerade Linie, auf der ein beliebiger Punkt P ausgewählt ist, während A der Fufspunkt des Lotes von O auf dieser Linie ist. Von den beiden Punkten A und P sind die reciproken Bilder A' und P' angegeben. Nennen wir

$$OA = a, \quad OA' = a', \quad OP = p, \quad OP' = p',$$

so ist also

$$p \cdot p' = a \cdot a' = R^2 \tag{109}$$

oder $p' : a' = a : p$. Daraus folgt die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $OP'A'$ und OAP. Da nun bei A ein rechter Winkel liegt, liegt auch bei P' ein solcher. Durchläuft also P die gerade Linie,

so folgt P' auf demselben Strahle OP, stets die Strecke OA' unter einem rechten Winkel erfassend, d. h. P' läuft auf dem Kreise, dessen Durchmesser OA' ist. Dem unendlich fernen Punkte der Geraden entspricht als Bild das Centrum O. Der Radius des Bildkreises ist $\frac{1}{2} OA'$, das ist gleich $R^2/2a$. Dreht man nun die Figur um die Axe OA, so beschreibt der Kreis um O die abbildende Kugel vom Radius R, die gerade Linie AP beschreibt eine Ebene im Raume, welche von O den Normalabstand OA besitzt, und der Bildkreis über OA' beschreibt als Bild jener Ebene eine Kugel.

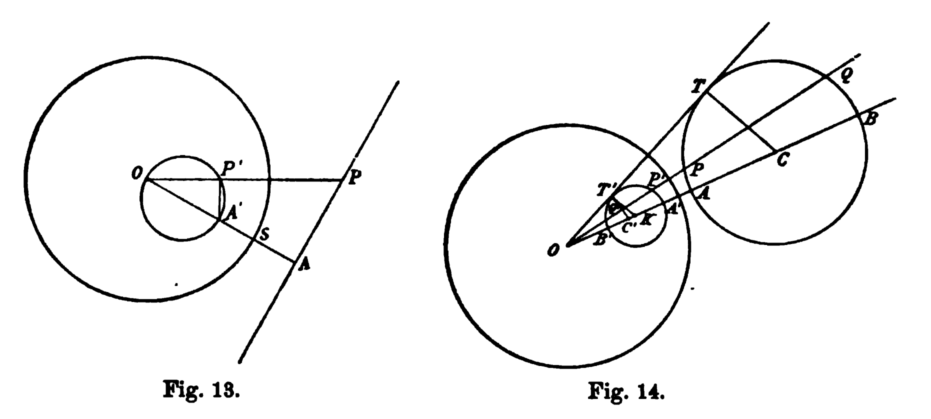


Fig. 13. Fig. 14.

2. **Bild einer Kugel.** In Figur 14 haben wir denselben abbildenden Kreis vom Radius R um den Punkt O, als Object aber einen Kreis um den Punkt C. Die Centrale OC schneidet ihn in dem Durchmesser AB, ein beliebiger Strahl von O aus schneidet ihn in der Sehne PQ, endlich sei noch die Tangente OT bemerkt.

Von den Punkten $ABPQT$ sind die reciproken Bildpunkte $A'B'P'Q'T'$ construirt. Bezeichnen wir:

$$OA = a \quad OB = b \quad OP = p \quad OQ = q \quad OT = t$$
$$OA' = a' \quad OB' = b' \quad OP' = p' \quad OQ' = q' \quad OT' = t',$$

so ist wegen des Gesetzes der Abbildung

$$a \cdot a' = b \cdot b' = p \cdot p' = q \cdot q' = t \cdot t' = R^2. \tag{110}$$

Anderseits ist wegen der Kreisgestalt des Objectes

$$a \cdot b = p \cdot q = t^2. \tag{110a}$$

Setzt man in diese letzte Relation mit Hülfe der vorhergehenden die gestrichelten Gröfsen ein, so erhält man:

$$\frac{R^2}{a'} \cdot \frac{R^2}{b'} = \frac{R^2}{p'} \cdot \frac{R^2}{q'} = \frac{R^4}{t'^2},$$

was nichts Anderes aussagt, als

$$a' \cdot b' = p' \cdot q' = t'^2. \tag{110b}$$

Daraus erkennt man ohne Weiteres, dafs das Bild des Kreises ebenfalls ein Kreis ist, dessen Lage und Dimensionen man aus der Figur 14 leicht ablesen kann. Der Mittelpunkt C des äufseren Kreises $\left(OC = \frac{a+b}{2}\right)$ bildet sich in einem Punkte C' $(OC' = c')$ ab nach dem Gesetz

$$\frac{a+b}{2} \cdot c' = R^2 \cdot \quad \text{oder } c' = \frac{2R^2}{a+b} \cdot \tag{110c}$$

Dieser Punkt C' ist indessen verschieden von dem Mittelpunkt K des Bildkreises:

$$OK = \frac{a' + b'}{2} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \tag{110d}$$

C' liegt excentrisch gegen O hin verschoben.

Errichtet man auf OT' im Punkte T' eine Senkrechte, so trifft man K, legt man dagegen einen Kreis über den Durchmesser OT', so trifft man C', denn dieser Kreis ist das Bild der Geraden TC.

Für den Radius r' des Bildkreises und den Radius r des Objectkreises liest man aus der Figur folgende Gleichung ab

$$\frac{r'}{r} = \frac{t'}{t}$$

oder unter Benutzung der reciproken Beziehungen und des Sekantensatzes:

$$r' = \frac{R^2}{t^2} r = \frac{R^2}{ab} \cdot \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{a} - \frac{R^2}{b}\right) = \frac{a' - b'}{2} \cdot \tag{110e}$$

Läfst man die Figur 14 um die Axe OC rotiren, so beschreiben alle 3 Kreise Kugeln: und wir erhalten sogleich den Satz, dafs das reciproke Bild einer Kugel im Raum wieder eine Kugel ist, deren Lage aus der ebenen Figur vollkommen erkannt werden kann, da diese einen gemeinsamen Centralschnitt durch alle drei Kugeln darstellt.

3. Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen zwischen Bild und Object. Wir stellen uns jetzt vor, es sei als Object eine beliebig gestaltete Raumfläche gegeben. Auf ihr wollen wir ein Flächenelement von dreieckiger Gestalt abgrenzen, welches so klein ist, dafs sowohl dessen Fläche als auch das Bild davon als eben und die

Begrenzungslinien als geradlinig gelten dürfen. In Figur 15 sei in perspektivischer Darstellung das kleine Dreieck auf der Raumfläche durch $A\,B\,C$ gegeben. Das reciproke Bild dazu sei das Dreieck $A'\,B'\,C'$.

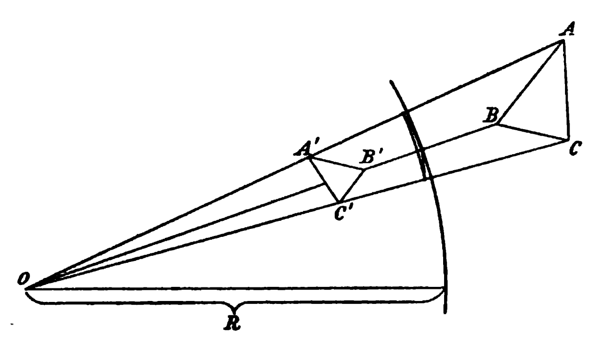


Fig. 15.

Bezeichne

$$OA = a \quad OB = b \quad OC = c$$
$$OA' = a' \quad OB' = b' \quad OC' = c',$$

dann ist

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = R^2. \tag{111}$$

Deſshalb liegen auf jeder der drei Seiten der spitzen Ecke O zwei langgestreckte ähnliche Dreiecke:

$$O\,B'\,C' \sim O\,C\,B, \quad O\,C'A' \sim O\,A\,C, \quad O\,A'\,B' \sim O\,B\,A.$$

Bezeichnen wir also noch die kleinen Strecken:

$$B\,C = \alpha \quad C\,A = \beta \quad A\,B = \gamma$$
$$B'\,C' = \alpha' \quad C'A' = \beta' \quad A'B' = \gamma',$$

so ergiebt sich aus den Aehnlichkeiten:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{b'}{c} = \frac{c'}{b} \qquad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{c'}{a} = \frac{a'}{c} \qquad \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}. \tag{111a}$$

Je kleiner nun das Objectdreieck gemacht wird, um so mehr nähern sich die drei Strahlenlängen a, b, c ein und demselben endlichen Werthe, den wir mit p bezeichnen und kurz den Abstand des Objectelementes vom Punkt O nennen. Ebenso nähern sich die drei reciproken Strecken a', b', c' immer mehr dem gemeinsamen Werth p' (dem Abstand des Bildelementes von O). Danach gehen die drei vorstehenden Gleichungen über in

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{p'}{p}, \tag{111b}$$

d. h. das Bilddreieck wird dem Objectdreieck bei verschwindender Grösse geometrisch ähnlich.

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist folgende: Wenn auf der Objectfläche zwei beliebige einander schneidende Linien gezeichnet sind, so schneiden sich deren Bilder auf der Bildfläche unter dem gleichen Winkel, oder mit anderen Worten, die reciproke Abbildung ist winkeltreu.

§ 36. Eine andere Anwendung der reciproken Abbildung zur Auffindung des Gleichgewichts der Elektricität auf Leitern von besonderer Gestalt.

In den §§ 32 und 34 haben wir die abbildende Kugel vom Radius R immer als Oberfläche des von aufsen influenzirten Leiters angesehen. Es giebt aber noch eine andere Anwendung, bei welcher diese Kugel nur ein geometrisches Hülfsmittel für die Ableitung eines Ladungssystems aus einem vorgeschriebenen anderen Ladungssysteme bildet.

Wir denken uns zunächst ein System von Punkten mit den Ladungen $e_1, e_2, \ldots e_a, \ldots$ festgelegt und bestimmen das Potential in einem beliebigen Raumpunkt nach Gleichung (14). $\varphi = \sum\limits_a \frac{e_a}{r_a}$. Nun denken wir uns in einiger Entfernung von dem Ladungssystem ein festes Centrum und nennen die Abstände der elektrischen Punkte von diesem Centrum $p_1, p_2, \ldots p_a, \ldots$, den Abstand des Ortes in dem φ bestimmt worden ist, nennen wir s, endlich die Winkel zwischen der Richtung s und den Richtungen der einzelnen p_a nennen wir $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_a \ldots$ Dann sind die einzelnen Abstände

$$r_a = \sqrt{s^2 + p_a^2 - 2 s p_a \cos \vartheta_a},$$

mithin ist das Potential:

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{s^2 + p_a^2 - 2 s p_a \cos \vartheta_a}}. \tag{112}$$

Jetzt denken wir um das feste Centrum die Kugel vom Radius R gelegt und bilden in ihr das äufsere Ladungssystem ab. Das Bild der Ladung e_a wird $-\frac{R}{p_a} e_a$, dessen Abstand vom Centrum $p'_a = \frac{R^2}{p_a}$. Nun suchen wir das Potential φ' dieses Bildsystems,

und zwar in demjenigen Punkte, der das Bild des vorher gewählten ist, dessen Abstand vom Centrum also $s' = \frac{R^2}{s}$ ist. Die Bilder liegen alle auf denselben Strahlen wie die Objecte; deſshalb haben die Winkel ϑ_a hier dieselben Werthe und es ist:

$$\varphi' = \sum_a \frac{-\frac{R}{p_a} e_a}{\sqrt{\frac{R^4}{s^2} + \frac{R^4}{p_a^2} - 2\frac{R^4}{s \cdot p_a} \cos \vartheta_a}}. \tag{113}$$

Wenn wir Zähler und Nenner der einzelnen Summenglieder mit $\frac{s \cdot p_a}{R^2}$ erweitern, so tritt in allen Zählern der gemeinsame Factor $\frac{s}{R}$ auf, den wir vor das Summenzeichen stellen dürfen, und es folgt:

$$\varphi' = -\frac{s}{R} \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{p_a^2 + s^2 - 2 s p_a \cos \vartheta_a}}. \tag{113 a}$$

Das ist aber nach Gleichung (112):

$$\varphi' = -\frac{s}{R} \cdot \varphi, \tag{114}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\varphi' = -\frac{R}{s'} \cdot \varphi \tag{114 a}$$

oder

$$\varphi' = -\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s'}} \cdot \varphi. \tag{114 b}$$

Diese einfache Beziehung erlaubt, das Potential φ' des allein vorhanden gedachten Bildsystems zu finden aus dem Potential des ursprünglichen Objectsystems, und zwar gilt die Beziehung für jedes Paar correspondirender Orte in beiden Systemen.

Man braucht die Betrachtung nun nicht auf Punktladungen zu beschränken, sondern kann namentlich auch die in der Elektrostatik der Leiter wichtigen Flächenbelegungen in der Kugel abbilden. Entspricht einem Flächenelemente ds das Bildelement ds', so muſs, wie die Betrachtung am Schluſs des vorigen Paragraphen und die Figur 15 sofort zeigen, wegen der Aehnlichkeit der Abbildung sein:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{p'^2}{p^2}. \tag{115}$$

Die Dichtigkeit der Flächenbelegung im Object sei ε und wir suchen die entsprechende Dichtigkeit ε' im Bilde. Das Quantum $\varepsilon\, d\, s$ vertritt einen geladenen Punkt im Object. Das Quantum seines Bildes ist $\varepsilon'\, d\, s'$ Deſshalb muſs die allgemeine Regel wie bei Punkten gelten:

$$(\varepsilon'\, d\, s') = -\frac{R}{p}(\varepsilon\, d\, s)$$

oder, da $\frac{R}{p} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}$ ist:

$$\frac{\varepsilon'\, d\, s'}{\varepsilon\, d\, s} = -\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}. \qquad (115\,\text{a})$$

Hieraus und aus der vorstehenden Gleichung für $\frac{d\, s'}{d\, s}$ folgt:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\sqrt{\frac{p}{p'}}^{3}, \qquad (115\,\text{b})$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{p^3}{R^3} = -\frac{R^3}{p'^3}. \qquad (115\,\text{c})$$

Während also das Bild einer äuſseren Punktladung schwächer als das Object ist, wird die Flächendichtigkeit gröſser in dem inneren Bilde als in der äuſseren Objectfläche. Das kommt daher, daſs die Flächen noch stärker reducirt werden als die Ladungen.

Anhangsweise sei noch auf die Abbildung räumlich geladener Objecte hingewiesen, wenngleich man selten davon wird Gebrauch machen können. Ein Volumelement $d\,\tau$ im Abstand $p > R$ besitzt ein Bild $d\,\tau'$ im Abstand p'. Wegen der Aehnlichkeit der kleinsten Theilchen muſs sein:

$$\frac{d\,\tau'}{d\,\tau} = \frac{p'^3}{p^3}. \qquad (116)$$

Die räumliche Dichtigkeit in Object und Bild sei s und s'. Dann entspricht $s\, d\,\tau$ einem geladenen Objectpunkt, $s'\, d\,\tau'$ dessen Bildpunkt, mithin ist:

$$(s'\, d\,\tau') = -\frac{R}{p}(s\, d\,\tau)$$

oder

$$\frac{s'\, d\,\tau'}{s\, d\,\tau} = -\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}. \qquad (116\,\text{a})$$

Daraus folgt:

$$\frac{s'}{s} = -\sqrt{\frac{p}{p'}}^{\,5} = -\frac{p^5}{R^5} = -\frac{R^5}{p'^5}. \tag{116 b}$$

Diese Abbildungen, insbesondere diejenige elektrisch belegter Oberflächen, wollen wir nun zur Auffindung neuer Gleichgewichte auf Leitern benützen. Würde man als Object einen geladenen Leiter oder einen influenzirten Leiter nebst der die Influenz hervorrufenden Ladung wählen, so würde immer auf der Leiteroberfläche das Potential $\overline{\varphi}$ einen constanten Werth besitzen. Dann sieht man aber aus Gleichung (114), dafs an der Oberfläche des Bildes das Potential $\overline{\varphi}'$ der Bildladung nicht constant sein kann, da doch die Abstände s der einzelnen Flächenelemente vom Nullpunkt variabel sind. Eine Abbildung solcher Objecte kann also nicht Gleichgewichtsvertheilungen auf Leitern liefern.

Dagegen erhält man eine solche Gleichgewichtsvertheilung stets in folgender Weise: Man nimmt einen zur Erde abgeleiteten Conductor und erzeugt durch eine äufsere Punktladung e auf dessen Oberfläche eine Influenzbelegung. Das gesammte Potential der Punktladung und der Flächenbelegung zusammen ist dann an der leitenden Fläche überall gleich Null. Nennt man den Abstand der Punktladung von den einzelnen Flächenelementen s, so ist der von e herrührende Antheil zum Potential an der Fläche gleich $\frac{e}{s}$, folglich der übrige, von der Flächenbelegung allein herrührende Antheil gleich $-\frac{e}{s}$.

Entfernt man dann den Punkt e wieder, so fliefst freilich in Natur auch die Influenzbelegung an dem Leiter wieder davon in die Erde, aber man kann diese Belegung in Gedanken so fixirt denken, dafs sie in derselben Vertheilung verharrt, wie sie durch den Punkt e angeordnet wurde, auch nachdem man diesen weggenommen hat. Wählt man nun diese fixirte Belegung als Object und legt den Mittelpunkt der abbildenden Kugel in den Ort, wo vorher die Punktladung e sich befand, so stellt das Bild dieser Vertheilung immer das Gleichgewicht von Elektricität auf einem isolirten geladenen Leiter dar, dessen Gestalt nach den Regeln der reciproken Abbildung aus der Gestalt des ursprünglichen influenzirten Leiters abgeleitet wird. Der Beweis der Behauptung folgt aus der Gleichung (114). Das Potential φ der Objectladung in einem Punkte der Oberfläche des Conductors ist

$$\varphi = -\frac{e}{s}.$$

Deſshalb wird das Potential φ' der Bildladung in dem Bildpunkte, also ebenfalls in einem Punkte der Oberfläche des reciproken Bildes jenes Conductors

$$\varphi' = -\frac{s}{R}\varphi = +\frac{e}{R}.$$

Dieser Betrag ist an allen Stellen der Oberfläche constant. Im Inneren des Objectconductors herrscht im realen Gleichgewicht, d. h. unter Anwesenheit des influenzirenden Punktes e überall das Potential Null, nach gedachter Fixirung der Oberflächenbelegung und Entfernung des Punktes e besteht daselbst das variabele Potential

$$\varphi = -\frac{e}{s},$$

wo s der Abstand eines inneren Punktes im Object vom Nullpunkt bedeutet. Im Bildpunkt, der dann ein innerer Punkt des Bildkörpers wird, ist nach Gleichung (114)

$$\varphi' = -\frac{s}{R}\varphi = +\frac{e}{R}.$$

Es sind also die Gleichgewichtsbedingungen für einen isolirten geladenen Leiter in diesem Bilde erfüllt.

Man wird diese Methode mit Nutzen nur da anwenden können, wo das Objectsystem sich in einfacher Weise angeben läſst, sowohl was die Flächenbelegung als auch das Potential im umgebenden Raume betrifft. Ist dies der Fall, so haben wir alle Mittel in der Hand, nun auch die Flächendichtigkeit auf dem und das Potential rings um den Bildkörper anzugeben.

In § 33 lernten wir die durch einen geladenen Punkt e auf einer im Abstand h gegenüber gestellten unendlichen leitenden Ebene hervorgerufene Flächenbelegung kennen und konnten auch das Potential dieser Belegung vor der Ebene in einfachster Weise durch das Potential einer fingirten Punktladung $-e$ hinter der Ebene darstellen. Denken wir nun diese Flächenbelegung fixirt, den Punkt e entfernt, und die Abbildung der belegten Ebene ausgeführt. Das Bild der Ebene ist nach § 35 eine Kugel vom Radius $\frac{R^2}{2h}$, das Bild besitzt auf der Oberfläche und im Inneren (letzteres entsprechend dem Objectraume hinter der Ebene) das constante Potential $\varphi' = +\frac{e}{R}$. Die Flächendichtigkeit σ' berechnet sich nach Glei-

chung (115c) aus der in Gleichung (105 b) angegebenen Dichtigkeit ε auf der Ebene zu

$$\varepsilon' = + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2eh}{R^3},$$

ist also ebenfalls constant. Da endlich das Potential der fixirten Belegung der Ebene vor der Ebene aussieht wie dasjenige des Punktes $-e$ im Spiegelpunkte, so sieht das Potential der Bildbelegung aufserhalb der Bildkugel aus wie dasjenige des reciproken Bildes von jenem Punkte $-e$. Dieses Bild fällt in das Centrum der Bildkugel und hat die Stärke

$$e' = + \frac{R}{2h} e,$$

denn der Abstand jenes Spiegelpunktes hinter der Ebene von dem früheren Orte von e beträgt $2h$. Vergleicht man unter einander die hier gefundenen Werthe des Kugelradius, des Potentials auf der Oberfläche, der Flächendichtigkeit und endlich des Potentials im Aufsenraum, welches aussieht, als käme es von einer Punktladung e' im Kugelcentrum her, so erkennt man, dafs wir hier alle die uns bekannten Verhältnisse wiederfinden, welche für eine isolirte, leitende, geladene Kugel gelten müssen.

Ein neues Resultat, das Gleichgewicht auf einem complicirter gestalteten Conductor, liefert die Abbildung der ebenfalls in § 33 besprochenen Influenzladung auf zwei senkrecht zusammenstofsenden leitenden Ebenen. Wir knüpfen an Figur 9, S. 143, an, entfernen die reelle Punktladung $+e$ und legen an ihre Stelle das Centrum O der abbildenden Kugel vom Radius R (Figur 16). Die beiden Ebenen bilden sich in zwei Kugeln ab, welche sich ebenso wie die Ebenen, rechtwinklig durchschneiden (Winkeltreue der Abbildung). Die Gröfse der beiden Kugeln hängt von der gewählten Lage des Centrums O, also von den beiden Abständen a und b ab, die Radien sind:

$$\varrho_a = \frac{R^2}{2a} \quad \text{und} \quad \varrho_b = \frac{R^2}{2b}.$$

Das Bild der durch zwei Ebenen gebildeten concaven Raumecke ist also eine geschlossene Oberfläche, welche aus Theilen zweier Kugeln gebildet wird. Die drei Spiegelbilder des reellen Punktes e, welche zur Darstellung des Potentials in dem concaven Raumquadranten nützlich waren, werden jetzt abgebildet in den beiden Kugelmittelpunkten A' und B' und in einem Punkte C' auf der

Verbindungslinie beider. Es ist auch leicht, die Stärke dieser drei Bildpunkte aus der Figur abzulesen:

In A' ist $+\frac{R}{2a}\mathfrak{e}$, in B' ist $+\frac{R}{2b}\mathfrak{e}$, in C' endlich $-\frac{R}{2\sqrt{a^2+b^2}}\mathfrak{e}$

zu fingiren. Die körperliche Gestalt des durch unsere Abbildung gefundenen Conductors findet man, wenn man das ebene Bild der beiden einander senkrecht schneidenden Kreise um die Centrale $A'B'$ rotiren läſst. Das Innere dieses Körpers ist das Abbild des Raumes

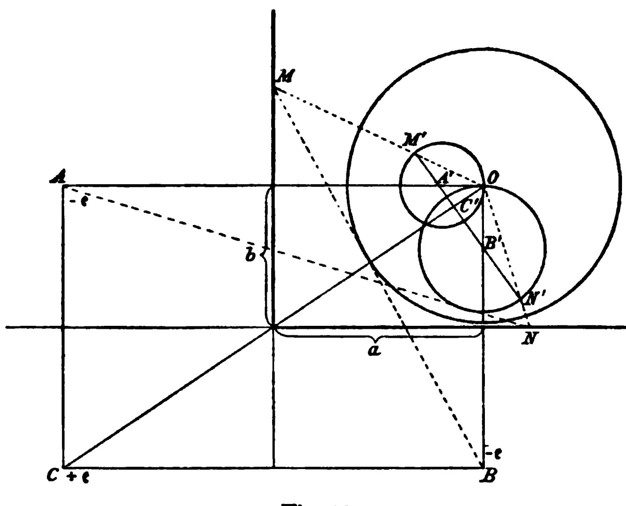


Fig. 16.

hinter der leitenden Wandung. Wir finden daher in der Abbildung im Inneren bis an die Oberfläche des Conductors das constante Potential

$$\varphi' = +\frac{\mathfrak{e}}{R}.$$

Die Dichtigkeit ε' der Flächenbelegung könnte man mittels der Gleichung (115c) aus der in Gleichung (106b) angegebenen Dichtigkeit ε auf den beiden Ebenen berechnen. Es würde sich zeigen, daſs sie ein stärkstes Maximum an der äuſsersten Stelle der kleineren Kugel, ein schwächeres an der entgegengesetzten Stelle der gröſseren Kugel aufweist. Besonders bemerkenswerth ist, daſs in der eingeschnürten Falte der Conductorfläche die Dichtigkeit Null ist, da sie auch in der Schnittlinie beider Ebenen gleich Null war.

Nach Auſsen erzeugt der Conductor ein Feld, als käme es von den drei gedachten Punktladungen A', B', C' her. Die gesammte,

dem Conductor mitgetheilte Ladung e' mufs gleich sein der algebraischen Summe dieser drei Punkte, also

$$e' = + \frac{R \cdot e}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right). \tag{117}$$

Für jeden isolirten und nicht influenzirten Conductor besteht für das Gleichgewicht zwischen Gesammtladung und Potential eine Beziehung von der Form:

$$e' = C \cdot \varphi',$$

wo C eine nur von der geometrischen Gestalt abhängige Constante von der Dimension einer Länge bedeutet, welche man die **Capacität** des Conductors nennt. Für den hier betrachteten Körper giebt dies

$$C = \frac{e'}{\varphi'} = \frac{\frac{R e}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)}{\frac{e}{R}} = \left(\frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} - \frac{R^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

oder durch die beiden oben angegebenen Kugelradien ϱ_a und ϱ_b ausgedrückt:

$$C = \varrho_a + \varrho_b - \frac{\varrho_a \varrho_b}{\sqrt{\varrho_a^2 + \varrho_b^2}}.$$

Der letzte negative Summand dieses Ausdrucks hat einfache geometrische Bedeutung: Er mifst die Länge der Strecke OC' in Figur 16. Man kann daher die Capacität dieses Conductors sehr leicht als Länge construiren.

Drittes Kapitel.

Kugelfunctionen.

§ 37. Vorbemerkungen.

Hat man zwei verschiedene Lösungen φ_1 und φ_2 der LAPLACE'schen Differentialgleichung gefunden, so ist auch $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$ eine Lösung, weil die Differentialgleichung linear und homogen ist. Die Coefficienten können complex gesetzt werden, wodurch eingreifende Veränderungen in der äufseren Gestalt der Lösungen entstehen können. Auch unendliche Summen $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 + \ldots$

können Lösungen darstellen, wenn die einzelnen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ der Differentialgleichung genügen und die unendlichen Reihen convergiren. Selbstverständlich übertragen sich Unstetigkeitsstellen einzelner Summanden auf die ganze Summe. Wenn $\varphi(x, y, z)$ ein Integral ist, so ist $\varphi(x + a, y + b, z + c)$ auch ein solches, denn die neuen Argumente der Function φ bezeichnen nur andere Raumpunkte, in denen aber φ ebenfalls die LAPLACE'sche Differentialgleichung befriedigt. Die Unstetigkeitsstellen der Function ändern bei der Einsetzung der neuen Argumente ihre Lage im Raume, wie bei einer gemeinsamen translatorischen Verrückung mit den Componenten $-a, -b, -c$. Aus einer Vereinigung der bereits angeführten Sätze folgt, dafs auch $\frac{1}{a}\varphi(x + a, y, z) - \frac{1}{a}\varphi(x, y, z)$ ein Integral ist. Läfst man darin die Strecke a gegen 0 streben, so erhält der Ausdruck einen festen, im Allgemeinen endlichen Grenzwerth, den partiellen Differentialquotient von φ nach x. Es ist defshalb auch

$$\Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

In gleicher Weise kann man höhere Differentialquotienten von φ bilden, nach x, nach y, nach z, gemischt wie man will, und erhält aus φ immer neue Functionen, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügen. Jedoch sind die Arten des Unstetig- oder Unendlichwerdens bei den höheren Differentialquotienten andere, und auch die zugehörigen elektrischen Vertheilungen, deren Potentiale durch die höheren Differentialquotienten einer Function φ dargestellt werden, sehen complicirter aus, als die zur Function φ selbst gehörigen Ladungen. Ist z. B. φ das Potential von Ladungen, so gehören zu $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ als Potentialen sogenannte Doppelpunkte, das sind je zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen, bei denen das Product aus Ladung und Abstand ein festes Moment bildet, während der Abstand selbst verschwindend klein wird. Gehören zu dem Felde von φ elektrische Flächenbelegungen, so erhält man durch geeignete Verbindungen der ersten Differentialquotienten von φ Potentiale von Doppelschichten etc.

Wenn φ bereits Unendlichkeitsstellen oder Unstetigkeitsstellen aufweist, so werden die Differentialquotienten mit steigender Ordnungszahl daselbst immer heftiger unendlich. Solche Stellen sind selbstverständlich von der Betrachtung der Function auszuschliefsen.

§ 38. Die höheren Differentialqotienten von $\frac{1}{r}$.

Wir wollen jetzt ausgehen von der einfachsten Potentialfunction, nämlich derjenigen, welche das Feld um eine im Nullpunkt festgelegte punktförmige positive Einheitsladung bestimmt. Dieses ist

$$\varphi_0 = \frac{1}{r}, \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \tag{118}$$

Bezeichnen wir noch die Winkel, welche der Strahl r mit den positiven Coordinatenaxen bildet, mit α, β, γ, so ist

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{r} = \cos\beta, \quad \frac{z}{r} = \cos\gamma. \tag{118a}$$

Dann genügt φ_0 im ganzen Raume, mit Ausnahme des Nullpunktes der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

Bilden wir nun successive die Reihe der Differentialquotienten, so erhalten wir neue Functionen, welche ebenfalls der LAPLACE'schen Gleichung im ganzen Raume genügen, mit Ausnahme des Nullpunktes, in welchem sie unendlich werden wie höhere Potenzen von $1/r$.

Die Reihe der nur nach x genommenen Differentialquotienten beginnt mit folgenden Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3} && = \frac{-\cos\alpha}{r^2} \\
\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5} && = \frac{-1 + 3\cos^2\alpha}{r^3} \\
\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} &= 9\frac{x}{r^5} - 15\frac{x^3}{r^7} && = \frac{9\cos\alpha - 15\cos^3\alpha}{r^4} \\
\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial x^4} &= 9\frac{1}{r^5} - 90\frac{x^2}{r^7} + 105\frac{x^4}{r^9} \\
& && = \frac{9 - 90\cos^2\alpha + 105\cos^4\alpha}{r^5} \\
\frac{\partial^5 \varphi_0}{\partial x^5} &= -225\frac{x}{r^7} + 1050\frac{x^3}{r^9} - 945\frac{x^5}{r^{11}} \\
& && = \frac{-225\cos\alpha + 1050\cos^3\alpha - 945\cos^5\alpha}{r^6} \\
& && \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \tag{118b}$$

Durch Vertauschung der Buchstaben x und α mit y und β resp. z und γ erhält man zwei analoge Reihen. Endlich können auch

mannigfaltige gemischte Differentialquotienten nach x, y, z zugleich gebildet werden, z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y\,\partial z} &= \frac{3\,y\,z}{r^5} &&= \frac{3\cos\beta\cos\gamma}{r^3}\\
\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2\,\partial y} &= 3\,\frac{y}{r^5} - 15\,\frac{x^2 y}{r^7} &&= \frac{3\cos\beta - 15\cos^2\alpha\cos\beta}{r^4}\\
\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\,\partial y\,\partial z} &= -\frac{15\,x\,y\,z}{r^7} &&= \frac{-15\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{r^4}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\qquad (118\text{c})$$

Die allgemeinste Form eines $\mathfrak{n}$ten Differentialquotienten von φ_0 ist

$$\varphi_{\substack{\mathfrak{n}\\ \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{n}} \varphi_0}{\partial x^{\mathfrak{a}}\,\partial y^{\mathfrak{b}}\,\partial z^{\mathfrak{c}}}, \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{n}, \qquad (119)$$

wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{n}$ natürliche Zahlen sind.

Es stellt sich das allgemeine Gesetz heraus, dafs man $\varphi_{\mathfrak{n}}$ darstellen kann durch eine ganze homogene Function $\mathfrak{n}$ten Grades von x, y, z, dividirt durch die Potenz $r^{2\mathfrak{n}+1}$. So läfst sich z. B. der letzte der in Gleichung (118b) angeführten Differentialquotienten auf den Generalnenner r^{11} bringen und lautet dann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 \varphi_0}{\partial x^5} &= \frac{-225\,x\,r^4 + 1050\,x^3 r^2 - 945\cdot x^5}{r^{11}}\\
&= \frac{-120x^5 + 600x^3y^2 - 225xy^4 + 600x^3z^2 - 450xy^2z^2 - 225xz^4}{r^{11}}.
\end{aligned}$$

Nennen wir die auf diese Weise im Zähler entstehenden homogenen Functionen $H_{\mathfrak{n},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$, so ist allgemein

$$\varphi_{\substack{\mathfrak{n}\\ \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{a}}\,\partial y^{\mathfrak{b}}\,\partial z^{\mathfrak{c}}} = \frac{H_{\mathfrak{n},\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{r^{2\mathfrak{n}+1}}. \qquad (119\text{a})$$

Andererseits aber können wir mittels der Gleichung (118a) an Stelle von x, y, z die Richtungscosinus von r in die Zähler der Ausdrücke schaffen, wie dies in (118b) beispielsweise bereits geschehen ist. Dann erscheint jeder $\mathfrak{n}$te Differentialquotient von $\frac{1}{r}$ als ein Bruch mit dem Nenner $r^{\mathfrak{n}+1}$, während im Zähler eine ganze

Function $n$ten Grades der drei Richtungscosinus auftritt. Nennen wir diese: $K_{n,a,b,c}$, so ist

$$\varphi_{n \atop a,b,c} = \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^a \, \partial y^b \, \partial x^c} = \frac{K_{n,a,b,c}}{r_{n+1}} \quad \text{oder} \quad K_{n,a,b,c} = r^{n+1} \cdot \frac{\partial^n \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^a \cdot \partial y^b \cdot \partial x^c} \cdot \qquad (119\,b)$$

Einfache Beispiele dieser K-Functionen sind in den zweiten Formen der Gleichungen (118b) und (118c) gegeben. Diese K_n sind die sogenannten Kugelfunctionen, welche zuerst von Laplace näher untersucht worden sind und deren Nutzen für die Potentialtheorie wir im Folgenden aus einander setzen wollen.

Sofort erkennt man zwischen den Kugelfunctionen und den vorher erwähnten homogenen Coordinatenfunctionen $H_{n,a,b,c}$ folgenden Zusammenhang:

$$r^n \cdot K_{n,abc} = H_{n,abc} \cdot \qquad (119\,c)$$

Für die praktische Benutzung dieser Functionen ist zwar die hier gegebene Art ihrer Bildung noch schwerfällig, jedoch ist ihre Definition in dieser Fassung verhältnifsmäfsig leicht anschaulich und es lassen sich auch gewisse wichtige Gesetze aus ihr leicht ableiten. Das Unendlichwerden der Differentialquotienten φ_n im Nullpunkt erscheint in der Schreibweise (119b) nur durch den Nenner r^{n+1} verursacht, denn der Zähler $K_{n,a,b,c}$ als reine Function der Richtungswinkel von r ist von der Länge r unabhängig und behält seinen endlichen Werth auch bei verschwindendem r. In der Form (119a) steht im Nenner gar die Potenz r^{2n+1} und der Zähler $H_{n,a,b,c}$ geht im Nullpunkt selbst auf Null herunter wie die positive Potenz r^n. Dagegen wächst in grofser Entfernung vom Nullpunkt $H_{n,a,b,c}$ über alle Grenzen wie r^n, während φ_n dort gegen Null schwindet wie $r^{-(n+1)}$.

Wir wollen nun nachweisen, dafs die ganze homogene Function H_n im Zähler für sich allein (ohne den Nenner r^{2n+1}) ebenfalls der Laplace'schen Differentialgleichung genügt.

Wenn U und V zwei differenzirbare Raumfunctionen sind, so gilt ganz allgemein die Formel:

$$\varDelta(UV) = U\varDelta V + V\varDelta U + 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad (120)$$

Setzen wir nun

$$U = \frac{1}{r^{2n+1}}, \quad V = H_n,$$

so brauchen wir auf der rechten Seite für die runde Klammer:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) = -(2\mathfrak{n}+1)\cdot\frac{x}{r^{2\mathfrak{n}+3}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) = -(2\mathfrak{n}+1)\ \frac{y}{r^{2\mathfrak{n}+3}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) = -(2\mathfrak{n}+1)\ \frac{z}{r^{2\mathfrak{n}+3}}.$$

Ferner müssen wir ΔU bilden: Durch nochmalige Differentiation des ersten der drei vorstehenden Ausdrücke nach x erhält man:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) = -(2\mathfrak{n}+1)\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}} + (2\mathfrak{n}+1)(2\mathfrak{n}+3)\frac{x^2}{r^{2\mathfrak{n}+5}}.$$

Bildet man analog die zweiten Differentialquotienten nach y und z und addirt alle drei, so ergiebt sich:

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) = -(2\mathfrak{n}+1)\frac{3}{r^{2\mathfrak{n}+3}} + (2\mathfrak{n}+1)(2\mathfrak{n}+3)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^{2\mathfrak{n}+5}}$$

oder

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) = \frac{2\mathfrak{n}(2\mathfrak{n}+1)}{r^{2\mathfrak{n}+3}}.$$

Setzen wir dies alles in Gleichung (120) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left(\frac{H_\mathfrak{n}}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\right) &= \frac{1}{r^{2\mathfrak{n}+1}}\Delta H_\mathfrak{n} + H_\mathfrak{n}\cdot\frac{2\mathfrak{n}(2\mathfrak{n}+1)}{r^{2\mathfrak{n}+3}}\\ &\quad -2\frac{(2\mathfrak{n}+1)}{r^{2\mathfrak{n}+3}}\left(x\frac{\partial H_\mathfrak{n}}{\partial x} + y\frac{\partial H_\mathfrak{n}}{\partial y} + z\frac{\partial H_\mathfrak{n}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(120\text{a})$$

Für jede homogene Function $\mathfrak{n}$ten Grades gilt der Satz:

$$x\frac{\partial H_\mathfrak{n}}{\partial x} + y\frac{\partial H_\mathfrak{n}}{\partial y} + z\frac{\partial H_\mathfrak{n}}{\partial z} = \mathfrak{n}H_\mathfrak{n}.\qquad(121)$$

Beweis:

Ein einzelner Summand von $H_\mathfrak{n}$ hat die Form:

$$h_\mathfrak{n} = C\cdot x^\mathfrak{p}\cdot y^\mathfrak{q}\cdot z^\mathfrak{r},\qquad \text{wo}\qquad \mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\mathfrak{r}=\mathfrak{n}.$$

Daher ist

$$\frac{\partial h_\mathfrak{n}}{\partial x} = \mathfrak{p}\,Cx^{\mathfrak{p}-1}y^\mathfrak{q}z^\mathfrak{r}$$

und

$$x\frac{\partial h_\mathfrak{n}}{\partial x} = \mathfrak{p}\,Cx^\mathfrak{p}y^\mathfrak{q}z^\mathfrak{r} = \mathfrak{p}\,h_\mathfrak{n}.$$

Ebenso ist

$$y \frac{\partial h_n}{\partial y} = \mathfrak{q}\, h_n$$

$$z \frac{\partial h_n}{\partial z} = \mathfrak{r}\, h_n .$$

Also

$$x \frac{\partial h_n}{\partial x} + y \frac{\partial h_n}{\partial y} + z \frac{\partial h_n}{\partial z} = (\mathfrak{p} + \mathfrak{q} + \mathfrak{r})\, h_n = \mathfrak{n}\, h_n .$$

Dies über sämmtliche Summanden der homogenen Function summirt, liefert die Gleichung (121).

Benutzt man diese Gleichung zur Umformung des letzten Gliedes von (120a), so erkennt man, dafs ihre beiden letzten Glieder sich aufheben und übrig bleibt:

$$\varDelta\left(\frac{H_n}{r^{2n+1}}\right) = \frac{1}{r^{2n+1}}\, \varDelta H_n . \tag{122}$$

Wir wissen nun. dafs die linke Seite (bis auf die Stelle $r = 0$) überall gleich Null ist, denn sie ist das $\varDelta$ von einem $\mathfrak{n}$ten Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$. Defshalb mufs auch die rechte Seite verschwinden, d. h. es mufs sein

$$\varDelta H_n = 0 , \tag{122a}$$

d. h. die durch Gleichung (119a) definirten homogenen Functionen H_n genügen der LAPLACE'schen Differentialgleichung. Im Nullpunkt ist die linke Seite nicht mehr Null, sondern steigt über alle Grenzen wie $\frac{1}{r^{n+3}}$ (da der $\mathfrak{n}$te Differentialquotient von $\frac{1}{r}$ selbst wie $\frac{1}{r^{n+1}}$ steigt). Da aber rechts eine noch höhere Potenz im Nenner steht, so ist für $\varDelta H_n$ im Nullpunkt keine Ausnahmestelle anzunehmen, vielmehr gilt auch dort (122a). Dagegen wird H_n selbst in grofser Entfernung über alle Grenzen wachsen wie r^n. Als Potential eines elektrischen Feldes kann daher eine Function H_n nur in begrenzten Gebieten dienen. Jenseits müssen Unstetigkeiten liegen, welche auf die ursächlichen Ladungen hindeuten, während das Gebiet der Gleichung (122a), auch der Nullpunkt, dabei ganz leer von Elektricität sein mufs.

Man kann die Gleichung (122) auch zu dem umgekehrten Schlusse verwenden: Hat man auf irgend eine von unserer Gleichung (119a) unabhängigen Weise eine ganze homogene Function

$\mathfrak{n}$ten Grades aufgefunden, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt, so mufs diese Function, dividirt durch $r^{2\mathfrak{n}+1}$, ebenfalls ein Integral derselben Differentialgleichung sein, aber mit dem Ausnahmepunkt $r = 0$.

Das Auffinden solcher ganzer Functionen ist nicht schwer. Jede Constante (Function 0ten Grades) und jede lineare homogene Function: $Ax + By + Cz$ genügt der LAPLACE'schen Differentialgleichung. Bei den Functionen zweiten Grades: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy$ mufs schon eine Bedingung zwischen den Coefficienten erfüllt sein, denn das Δ dieser Function ist gleich $2(A + B + C)$. Die ganze homogene Function zweiten Grades erfüllt die LAPLACE'sche Gleichung nur dann und immer dann, wenn die Coefficienten der drei Quadrate zusammen die Summe Null geben. Bei höheren Graden steigt die Coefficientenzahl, aber auch die Bedingungszahl. Im Allgemeinen kann man darüber Folgendes aussagen. Das Δ einer homogenen Function $\mathfrak{n}$ten Grades ist eine homogene Function $(\mathfrak{n} - 2)$ten Grades, deren Coefficienten als algebraische Summen von ganzzahligen Vielfachen der Functionscoefficienten erscheinen. Soll nun dieses Δ für jede Werthgruppe der Variabelen gleich Null sein, so mufs jede dieser eben bezeichneten algebraischen Summen einzeln $= 0$ sein. Das sind demnach eben so viel Bedingungen, als die homogene Function $(\mathfrak{n} - 2)$ten Grades Glieder besitzt, nämlich $\frac{(\mathfrak{n} - 1)\mathfrak{n}}{2}$.

Diese Bedingungen müssen von den $\frac{(\mathfrak{n} + 1)(\mathfrak{n} + 2)}{2}$ Coefficienten der homogenen Function $\mathfrak{n}$ten Grades erfüllt werden. Man kann eben so viele Coefficienten, als Bedingungsgleichungen vorliegen, durch die übrig bleibenden ausdrücken, und erkennt, dafs

$$\frac{(\mathfrak{n} + 1)(\mathfrak{n} + 2)}{2} - \frac{(\mathfrak{n} - 1)\mathfrak{n}}{2} = 2\mathfrak{n} + 1 \tag{123}$$

Coefficienten frei verfügbar bleiben. Das allgemeinste ganze homogene Integral $\mathfrak{n}$ten Grades der LAPLACE'schen Gleichung hat also $2\mathfrak{n} + 1$ willkürliche Constanten.

Die von uns im Zähler von Gleichung (119a) aufgefundenen $H_{\mathfrak{n},\mathfrak{abc}}$ haben gar keine verfügbaren Coefficienten. Man kann so viele $H_{\mathfrak{n},\mathfrak{abc}}$ auffinden, als drei natürliche Zahlen (inclusive Null) sich zu der Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{n}$ zusammenstellen lassen; das sind $\frac{(\mathfrak{n} + 1)(\mathfrak{n} + 2)}{2}$. Jede mit einem unbestimmten Factor multiplicirt und alle addirt geben dann auch eine ganze homogene Function

$\mathfrak{n}$ ten Grades, die der LAPLACE'schen Gleichung genügte. Dieser Ausdruck hat scheinbar $\frac{(\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}+2)}{2}$ disponible Constanten, wie die allgemeinste Function $\mathfrak{n}$ ten Grades.

Wir haben aber eben gesehen, dafs die allgemeinste passende Function nur $(2\mathfrak{n}+1)$ disponible Constanten hat. Also müssen sicher alle durch Summirung der $H_{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ gebildeten Functionen unter denen sein, die wir unter Berücksichtigung der $\frac{(\mathfrak{n}-1)\mathfrak{n}}{2}$ Bedingungsgleichungen aus der allgemeinsten Form herausholten, und die überzähligen Coefficienten müssen sich zu solchen Gruppen vereinigen, dafs im ganzen doch nur $2\mathfrak{n}+1$ unabhängige Bestandteile dadurch gebildet werden. Mit anderen Worten: Die einzelnen $H_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ sind nicht lauter unabhängige Integrale.

In gleicher Weise kann man die elementaren Kugelfunctionen $K_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ in Gleichung (119 c), mit je einem Factor erweitert, addiren und erhält so eine allgemeine Kugelfunction $\mathfrak{n}$ ter Ordnung, welche ebenso wie die ganze homogene der LAPLACE'schen Gleichung gehorsame Function, $2\mathfrak{n}+1$ willkürliche Constanten enthält.

§ 39. Auffindung der Normalformen für die Kugelfunctionen.

Um aus den $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ nach dem Schema der Gleichung (119 b) herstellbaren Kugelfunctionen $\mathfrak{n}$ ter Ordnung die $(2\mathfrak{n}+1)$ unabhängigen Grundformen herauszusuchen oder zusammenzustellen, müfste man umständliche Betrachtungen durchführen und müfste auch in unsymmetrischer Weise die einen vor anderen gleichberechtigten bevorzugen. Man kommt leichter zum Ziele und findet auch glattere Formen für die unabhängigen Elemente, wenn man einer der drei Axenrichtungen, z. B. der x-Richtung eine Sonderstellung anweist, wie das auch bei der Einführung räumlicher Polarcoordinaten um die x-Axe geschieht.

Statt der Variabelen y und z führen wir nun zwei andere, conjugirt complexe Variabele p und q ein durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p &= y + iz \\ q &= y - iz, \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

denen wir sogleich als Folgerungen hinzufügen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial q}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial q}{\partial z} = i. \end{aligned}\right\} \tag{124 a}$$

Die Rechengesetze sind für complexe Gröfsen die nämlichen, wie für reelle, mit der einen besonderen Bestimmung, dafs $i^2 = -1$ zu setzen ist. Defshalb kann man auch Functionen von x, y, z verwandeln in solche von $x, p, q,$ und auch partielle Differentialgleichungen für diese complexen Variabelen umformen. Hat man dann ein complexes Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung wie die LAPLACE'sche, gefunden, so mufs der reelle und der imaginäre Theil für sich einzeln auch je ein Integral liefern, so dafs man auf einen Schlag zwei particuläre Integrale findet.

Zunächst formen wir das LAPLACE'sche $\Delta\varphi$ für den Gebrauch der Variabelen x, p, q um. Das erste Glied $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ bleibt ungeändert; zur Bildung der zweiten und dritten müssen wir erst bilden

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}$$

oder wegen (124 a)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= i\frac{\partial\varphi}{\partial p} - i\frac{\partial\varphi}{\partial q}. \end{aligned}\right\} \tag{124 b}$$

Durch nochmalige Anwendung dieser letzten Formeln auf sich selbst erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} \end{aligned}\right\} \tag{124 c}$$

und durch Addition beider Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}.$$

Es ist daher

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} \tag{125}$$

und man kann die LAPLACE'sche Differentialgleichung in folgende Form bringen:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{125 a}$$

Von dieser transformirten Gleichung gilt rein mathematisch — gleichgültig, was man sich unter den Variabelen x, p, q vorstellt — wegen ihrer homogenen Linearität dasselbe Gesetz, welches wir für die cartesischen Coordinaten bereits verwendet haben, nämlich: Hat man eine Function φ_0 von x, p, q gefunden, welche die Differentialgleichung (125 a) befriedigt, so thun dies auch alle ihre mannigfachen Differentialquotienten nach den drei Variabelen, so daſs man als ein Integral ansetzen kann:

$$\varphi_{\substack{\mathfrak{n}\\ \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{n}} \varphi_0}{\partial x^{\mathfrak{a}} \cdot \partial p^{\mathfrak{b}} \cdot \partial q^{\mathfrak{c}}}, \qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{n}. \tag{126}$$

Nun sagt die Differentialgleichung (125 a) nichts Anderes aus, als daſs jede ihr genügende Function, wenn man sie einmal nach p und dann einmal nach q differenzirt $\left(\text{Operation } \frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q}\right)$, dasselbe Resultat liefert, als wenn man sie zweimal nach x differenzirt und den Factor $-\frac{1}{4}$ zusetzt $\left(\text{Operation } -\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$. Macht man also diese beiden gleichwerthigen Operationen $\mathfrak{l}$ mal an einer der Gleichung genügenden Function φ, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\partial^{2\mathfrak{l}} \varphi}{\partial p^{\mathfrak{l}} \cdot \partial q^{\mathfrak{l}}} = (-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{l}} \cdot \frac{\partial^{2\mathfrak{l}} \varphi}{\partial x^{2\mathfrak{l}}}. \tag{127}$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man das Integral (126) umformen, wobei wir die Fälle $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ unterscheiden.

Es sei zuerst $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, also $2\mathfrak{b} = \mathfrak{n} - \mathfrak{a}$. Dann ist

$$\varphi_{\substack{\mathfrak{n}\\ \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{b}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{a}}}{\partial x^{\mathfrak{a}}}\left(\frac{\partial^{2\mathfrak{b}} \varphi_0}{\partial p^{\mathfrak{b}}\, \partial q^{\mathfrak{b}}}\right) = \frac{\partial^{\mathfrak{a}}}{\partial x^{\mathfrak{a}}}\left[(-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{b}} \frac{\partial^{2\mathfrak{b}} \varphi_0}{\partial x^{2\mathfrak{b}}}\right] = (-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{b}} \frac{\partial^{\mathfrak{n}} \varphi_0}{\partial x^{\mathfrak{n}}}. \tag{127 a}$$

Zweitens sei angenommen $\mathfrak{b} > \mathfrak{c}$. Wir setzen $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{a} + 2\mathfrak{c} = \mathfrak{n} - \mathfrak{m}$, und können den Ausdruck (126) dann so anordnen:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\substack{\mathfrak{n}\\ \mathfrak{a},\mathfrak{c}+\mathfrak{m},\mathfrak{c}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{a}}}{\partial x^{\mathfrak{a}}}\left\{\frac{\partial^{2\mathfrak{c}}}{\partial p^{\mathfrak{c}}\, \partial q^{\mathfrak{c}}}\left(\frac{\partial^{\mathfrak{m}} \varphi_0}{\partial p^{\mathfrak{m}}}\right)\right\} &= (-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{c}} \frac{\partial^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}}}{\partial x^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{c}}}\left(\frac{\partial^{\mathfrak{m}} \varphi_0}{\partial p^{\mathfrak{m}}}\right)\\ &= (-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{c}} \frac{\partial^{\mathfrak{n}} \varphi_0}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}\, \partial p^{\mathfrak{m}}}.\end{aligned}\right\} \tag{127 b}$$

Drittens und letztens sei $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$. Wir setzen $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} = \mathfrak{n} - \mathfrak{m}$ und finden:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{n}\atop \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{b}+\mathfrak{m}} = \frac{\partial^{\mathfrak{a}}}{\partial x^{\mathfrak{a}}}\left\{\frac{\partial^{2\mathfrak{b}}}{\partial p^{\mathfrak{b}}\cdot\partial q^{\mathfrak{b}}}\left(\frac{\partial^{\mathfrak{m}}\varphi_0}{\partial q^{\mathfrak{m}}}\right)\right\} &= (-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{b}}\frac{\partial^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}}}{\partial x^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}}}\left(\frac{\partial^{\mathfrak{m}}\varphi_0}{\partial q^{\mathfrak{m}}}\right)\\ &= (-\tfrac{1}{4})^{\mathfrak{b}}\frac{\partial^{\mathfrak{n}}\varphi_0}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}.\partial q^{\mathfrak{m}}}.\end{aligned}\right\} \quad (127\,\text{c})$$

Auf die hier noch beibehaltenen Potenzen von $-\frac{1}{4}$ kommt weiter nichts an, da man ja jedes Integral dieser Differentialgleichungen mit einem beliebigen constanten Factor erweitern darf.

Die beiden Formen (127 b und c) unterscheiden sich bei Functionen φ_0, welche wie unser $1/r$ nach p und q symmetrisch zusammengesetzt sind [vgl. unten Gleichung (128)], nur im Vorzeichen von i, liefern also bei der Spaltung in Reell und Imaginär die gleichen Paare von Lösungen. So sieht man bereits, dafs der Ausdruck (126) mit seiner scheinbar zweifachen Mannigfaltigkeit der Ordnungszahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit der festen Summe $\mathfrak{n}$ in Wahrheit nur eine einfache Mannigfaltigkeit zweier natürlicher Zahlen $(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$ und $\mathfrak{m}$ mit der festen Summe $\mathfrak{n}$ besitzt, so dafs, da jeder Fall von $\mathfrak{m}=1$ bis $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ ein Lösungspaar enthält, während der Fall $\mathfrak{m}=0$ in (127 a) nur eine einzelne Lösung liefert, im Ganzen $2\mathfrak{n}+1$ verschiedene Grundformen $\mathfrak{n}$ter Ordnung auftreten, aus denen man die allgemeinste Lösung $\mathfrak{n}$ter Ordnung mit $2\mathfrak{n}+1$ disponiblen Coefficienten homogen und linear zusammensetzen kann. (Vergleiche den Schlufs des vorigen Paragraphen).

Die Differentialquotienten $\mathfrak{n}$ter Ordnung nach x, y, z endlich, welche in Gleichung (119 b) als Quelle für die Kugelfunctionen angeführt wurden, lassen sich natürlicher Weise als homogene lineare Summen von $\mathfrak{n}$ten Differentialquotienten nach x, p, q ausdrücken. Somit sind sowohl jene ganzen Functionen $H_{\mathfrak{n}\atop \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ als auch die Kugelfunctionen $K_{\mathfrak{n}\atop \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ zurückgeführt auf die hier in Aussicht gestellten, von einander unabhängigen $2\mathfrak{n}+1$ Grundformen.

Wollen wir nun deren Gestalt näher kennen lernen, so ist zu beachten, dafs in der Function $\varphi_0 = \dfrac{1}{r}$ nur die Gruppe y^2+z^2 vorkommt, für welche sich aus den Gleichungen (124) ergiebt:

$$y^2 + z^2 = p\,q = \varrho^2. \quad (128)$$

Die zu differenzirende Function hängt also explicite nur von dem Modulquadrat ϱ^2 der conjugirt complexen Gröfsen p und q ab. Es ist defshalb

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial(\varrho^2)}\cdot\frac{\partial(\varrho^2)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial(\varrho^2)}\cdot q,$$

und da q als unabhängige Variabele neben p besteht, bei $\mathfrak{m}$ facher Differentiation nach p:

$$\frac{\partial^{\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p^{\mathfrak{m}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{r}\right)}{[\partial(\varrho)^2]^{\mathfrak{m}}}\cdot q^{\mathfrak{m}}.$$

Ganz analog ist (129)

$$\frac{\partial^{\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial q^{\mathfrak{m}}} = \frac{\partial^{\mathfrak{m}}\left(\frac{1}{r}\right)}{[\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}}\cdot p^{\mathfrak{m}}.$$

Hiernach nehmen die Integrale (127 a, b, c) in jedem Falle die Gestalt an:

$$\varphi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} = \frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}[\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}}\,p^{\mathfrak{m}} \quad \text{oder} \quad = \frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}[\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}}\cdot q^{\mathfrak{m}}. \qquad (129\,a)$$

Bei den Potenzen $p^{\mathfrak{m}}$ und $q^{\mathfrak{m}}$ kommt uns zu Statten, dafs sie durch die Kreisfunctionen der Vielfachen des Azimuthalwinkels der complexen Gröfsen dargestellt werden können. Dieser Azimuthalwinkel ist hier nichts Anderes, als der Längenwinkel der räumlichen Polarcoordinaten um die x-Axe. Führen wir also jetzt ein:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta\cos\eta \\ z &= r\sin\vartheta\sin\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} p &= y + iz = r\sin\vartheta(\cos\eta + i\sin\eta) = r\sin\vartheta\cdot e^{i\eta} \\ q &= y - iz = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = r\sin\vartheta\cdot e^{-i\eta} \\ pq &= \varrho^2 = r^2\sin^2\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (130\,a)$$

und schliefslich

$$\left.\begin{aligned} p^{\mathfrak{m}} &= r^{\mathfrak{m}}\sin^{\mathfrak{m}}\vartheta\cdot e^{i\mathfrak{m}\eta} = r^{\mathfrak{m}}\sin^{\mathfrak{m}}\vartheta\cdot(\cos\mathfrak{m}\eta + i\sin\mathfrak{m}\eta) \\ q^{\mathfrak{m}} &= \qquad\qquad\qquad\quad = r^{\mathfrak{m}}\sin^{\mathfrak{m}}\vartheta\;(\cos\mathfrak{m}\eta - i\sin\mathfrak{m}\eta) \end{aligned}\right\} \qquad (130\,b)$$

und die Integrale $\mathfrak{n}$ter Ordnung nehmen im Anschlufs an (129 a) die Form an:

$$\varphi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} = r^{\mathfrak{m}}\cdot\frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}[\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}}\sin^{\mathfrak{m}}\vartheta\cdot(\cos\mathfrak{m}\eta \pm i\,\mathfrak{m}\eta). \qquad (131)$$

Der reelle Theil mit dem Factor $\cos \mathfrak{m}\eta$ und der imaginäre nach Streichung von i mit dem Factor $\sin \mathfrak{m}\eta$ sind, einzeln genommen, ebenfalls Lösungen. Erweitern wir also beide mit zwei willkürlichen Constanten $A_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ und $B_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$, so erhalten wir eine reelle Lösung von folgender Form:

$$\varphi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} = \underset{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}{k} \cdot r^{\mathfrak{m}} \frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}} \cdot [\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}} \cdot \sin^{\mathfrak{m}} \vartheta \cdot (A_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \cos \mathfrak{m}\eta + B_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \sin \mathfrak{m}\eta). \quad (131a)$$

An Stelle der beiden eingeführten Constanten kann man auch eine Amplitude $C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$ und eine Phasenconstante $c_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$ verwenden durch die Beziehungen:

$$A_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} = C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \cos c_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \quad \text{und} \quad B_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} = C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \sin c_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$$

oder

$$C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} = \sqrt{A_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}^2 + B_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}^2}, \qquad c_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} = \operatorname{arctang} \frac{B_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}}{A_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}}.$$

Dann erhält man

$$\varphi_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} = \underset{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}{k} \cdot r^{\mathfrak{m}} \frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}} \cdot [\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}} \sin^{\mathfrak{m}} \vartheta \cdot C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \cos(\mathfrak{m}\eta - c_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}). \quad (131\text{b})$$

Der in beiden Ausdrücken rechts vorangestellte Factor $k_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ bedeutet einen Zahlenwerth, dessen geeignete Bestimmung wir auf später verschieben. Jedenfalls hat dessen Hinzufügung nichts Bedenkliches, da aufserdem noch die disponiblen Factoren $A_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$, $B_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$ oder $C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$ vorhanden sind.

Aus dem $\varphi_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ gewinnt man nun die Kugelfunctionen ganz analog, wie in Gleichung (119b) angegeben, durch Multiplication mit $r^{\mathfrak{n}+1}$.

Wir wollen folgende Bezeichnung einführen:

$$P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} = k_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cdot r^{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+1} \cdot \frac{\partial^{\mathfrak{n}}\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^{\mathfrak{n}-\mathfrak{m}} [\partial(\varrho^2)]^{\mathfrak{m}}}. \quad (132)$$

Dann haben die auf diese Weise gefundenen Kugelfunctionen die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} &= P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cdot \sin^{\mathfrak{m}} \vartheta \cdot (A_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \cos \mathfrak{m}\eta + B_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \sin \mathfrak{m}\eta) \\ &= P_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \cdot \sin^{\mathfrak{m}} \vartheta \cdot C_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \cdot \cos(\mathfrak{m}\eta - c_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}). \end{aligned}\right\} \quad (132\text{a})$$

Die directe Berechnung der $\mathfrak{n}$ten Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ ist

ziemlich umständlich. Man müſste, um einen bestimmten von ihnen zu finden, eine ganze Reihe der niedrigeren vorher berechnen, auch ist das allgemeine Bildungsgesetz in seiner Abhängigkeit von den Zahlen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ auf diese Weise nur schwierig zu erkennen. Zur Anschauung seien die niedrigsten Vertreter dieser Ausdrücke $P_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}}$ von $\mathfrak{n} = 0$ bis $\mathfrak{n} = 4$ nach Gleichung (132) berechnet, hier angegeben:

	$\mathfrak{n} = 0$	$\mathfrak{n} = 1$	$\mathfrak{n} = 2$
$\mathfrak{m} = 0$	$k_{0,0} \cdot 1$	$k_{1,0} \cdot \left(-\frac{x}{r}\right)$	$k_{2,0} \cdot \left(-1 + 3\frac{x^2}{r^2}\right)$
$\mathfrak{m} = 1$		$k_{1,1} \cdot (-\frac{1}{2})$	$k_{2,1} \cdot \left(\frac{3}{2}\frac{x}{r}\right)$
$\mathfrak{m} = 2$			$k_{2,2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2})$
$\mathfrak{m} = 3$			
$\mathfrak{m} = 4$			

	$\mathfrak{n} = 3$	$\mathfrak{n} = 4$
$\mathfrak{m} = 0$	$k_{3,0} \cdot \left(9\frac{x}{r} - 15\frac{x^3}{r^3}\right)$	$k_{4,0} \cdot \left(9 - 90\frac{x^2}{r^2} + 105\frac{x^4}{r^4}\right)$
$\mathfrak{m} = 1$	$k_{3,1} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2}\frac{x^2}{r^2}\right)$	$k_{4,1} \cdot \left(-9 \cdot \frac{5}{2}\frac{x}{r} + 15 \cdot \frac{7}{2}\frac{x^3}{r^3}\right)$
$\mathfrak{m} = 2$	$k_{3,2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{r}\right)$	$k_{4,2} \cdot \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{x^2}{r^2}\right)$
$\mathfrak{m} = 3$	$k_{3,3} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2})$	$k_{4,3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}\frac{x}{r}\right)$
$\mathfrak{m} = 4$		$k_{4,4} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2})$

(132b)

Unmittelbar kann man hieraus nur erkennen, dafs

$$P_{n,n} = k_{n,n} \cdot (-1)^n \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \dots \tfrac{2n-1}{2}\right) \tag{132c}$$

ist, und dafs die mit $k_{n,m}$ multiplicirten Ausdrücke ganze Functionen von $\frac{x}{r}$ sind, welche entweder nach geraden oder ungeraden Potenzen dieses echten Bruches fortschreiten und mit dessen $(n - m)$ten Potenz abbrechen. Nun ist nach (130) $\frac{x}{r} = \cos\vartheta$, die $P_{n,m}$ sind also reine Functionen von $\cos\vartheta$ von dem eben angegebenen Charakter. Es ist üblich in der Theorie der Kugelfunctionen statt der Poldistanz ϑ direct deren Cosinus als Variabele einzuführen

$$\cos\vartheta = \mu. \tag{133}$$

Dann ist

$$\sin\vartheta = +\sqrt{1-\mu^2}$$

stets positiv, weil ϑ zwischen 0 und π bleibt.

§ 40. Transformation von $\Delta\varphi$ für den Gebrauch räumlicher Polarcoordinaten.

Um die allgemeine Form der Functionen $P_{n,m}$ des Argumentes μ zu finden, ist es nöthig, Integrale $n$ter Ordnung der Laplace'schen Differentialgleichung durch die gefundene Normalform (132a) der Kugelfunctionen zu bilden, also entweder $\varphi_{n,m} = \frac{1}{r^{n+1}} K_{n,m}$ oder $\varphi_{n,m} = r^n \cdot K_{n,m}$ und diese in die Differentialgleichung einzusetzen, welche dadurch befriedigt wird. Da aber jetzt die Integrale in Polarcoordinaten ausgedrückt sind, müssen wir erst das $\Delta\varphi$ für solche ausdrücken.

Dies geschieht am leichtesten, wenn man den allgemeinen Satz Gleichung (78) S. 92

$$\overline{\iint} ds \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = -\iiint d\tau \cdot \Delta\varphi$$

anwendet auf das Raumgebiet, welches ein Volumelement der Polarcoordinaten ausfüllt. Dieses ist begrenzt durch zwei concentrische Kugelflächen von den Radien r und $r + dr$, durch zwei Kegelmäntel von den Öffnungswinkeln ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und durch zwei Meridianebenen von den Längenwinkeln η und $\eta + d\eta$. Diese drei Flächen-

paare durchschneiden sich rechtwinklig. Der Raum sei so klein, daſs die Kanten seiner Umgrenzung als geradlinig gelten dürfen. Deren Länge ist

1. in radialer Richtung: dr,
2. in Richtung der Meridiankreise: $r \cdot d\vartheta$,
3. in Richtung der Parallelkreise: $r \sin\vartheta \cdot d\eta$.

Daher ist das Volumen:

$$d\tau = r^2 \sin\vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\eta\,,$$

das Rechteck auf der Kugelfläche vom Radius r:

$$ds_1 = r\,d\vartheta \cdot r \sin\vartheta\, d\eta\,,$$

das Rechteck auf dem Kegelmantel vom Winkel ϑ:

$$ds_2 = r \sin\vartheta\, d\eta \cdot dr\,,$$

das Rechteck auf der Meridianebene vom Längenwinkel η:

$$ds_3 = dr \cdot r\,d\vartheta\,.$$

Ferner ist die innere Normale auf ds_1 gleich dr, also der Beitrag zum Oberflächenintegral

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\, ds_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\eta\,.$$

Von der gegenüberliegenden Fläche rührt ein Beitrag her, welcher einerseits entgegengesetztes Vorzeichen besitzt, weil die innere Normale dort in Richtung $-dr$ fällt, andererseits einen durch den Schritt dr veränderten Werth besitzt. Die Summe beider Antheile ist

$$-dr \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\eta\right\} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\eta\, dr\,.$$

Die innere Normale auf ds_2 ist gleich $r\,d\vartheta$, also der Beitrag zum Oberflächenintegral

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\, ds_2 = \frac{\partial\varphi}{r\,\partial\vartheta} \cdot r \sin\vartheta\, d\eta\, dr = \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \sin\vartheta\, d\eta\, dr\,.$$

Von der gegenüberliegenden Fläche rührt wieder ein entgegengesetzter und durch den Schritt $d\vartheta$ veränderter Beitrag her, so daſs die Summe beider ist

$$-d\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \sin\vartheta\, d\eta\, dr\right\} = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) d\eta\, dr\, d\vartheta\,.$$

Die innere Normale auf ds_3 endlich ist gleich $r \sin\vartheta\, d\eta$, also der Beitrag zum Oberflächenintegral:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} ds_3 = \frac{\partial\varphi}{r\sin\vartheta\, d\eta}\cdot dr\, r\, d\vartheta = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} dr\, d\vartheta\,.$$

Von den beiden letzten Flächenelementen zusammen rührt daher der Beitrag her

$$-d\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}dr\,d\vartheta\right\} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}dr\,d\vartheta\,d\eta\,.$$

Nunmehr können wir die eingangs citirte Integralformel für unseren Fall zusammensetzen, und im Raumintegral wegen dessen Kleinheit $\Delta\varphi$ als constante Gröfse absondern. Dann erhalten wir:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\eta\,dr - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)d\eta\,dr\,d\vartheta$$
$$-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}dr\,d\vartheta\,d\eta = -\Delta\varphi\cdot r^2\sin\vartheta\cdot dr\,d\vartheta\,d\eta$$

oder

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\cdot \quad (134)$$

Wir wollen auch hier $\mu = \cos\vartheta$ als Variabele an Stelle von ϑ einführen. Dabei ist zu beachten, dafs

$$d\mu = -\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Das mittlere Glied der vorstehenden rechten Seite wird dadurch äufserlich etwas verändert, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot$$

Ferner schreiben wir $\sin\vartheta = \sqrt{1-\mu^2}$. Der Ausdruck nimmt dann die Form an:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\cdot \quad (134\text{a})$$

Braucht man das $\Delta\varphi$ nur für die LAPLACE'sche Differentialgleichung, wo es gleich Null ist (nicht aber etwa für die POISSON'sche oder für die Wellengleichung), so darf man den gemeinsamen Divisor r^2 fortlassen. Die LAPLACE'sche Gleichung lautet also, in den Variabelen r, μ, η ausgedrückt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0. \quad (135)$$

Es giebt, wie man leicht durchschauen kann, noch einige abweichende Formeln für diese Differentialgleichung, doch weichen sie nur in nebensächlichen Veränderungen von einander ab.

§ 41. Differentialgleichung für P_{nm} und deren Lösung.

In die soeben gebildete Form der LAPLACE'schen Differentialgleichung setzen wir nun folgende Lösung ein, in welcher die Kugelfunction K_{nm} aus Gleichung (132a) verwendet wird:

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} \cdot P_{nm} \cdot \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \cdot C \cdot \cos(m\eta - c). \tag{136}$$

Nur der erste Factor ist von r abhängig, und da

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right) = -(n+1)\frac{1}{r^{n+2}}$$

$$r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right) = -(n+1)\frac{1}{r^n}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\right) = (n+1)n\frac{1}{r^{n+1}}$$

ist, wird das erste Glied der Differentialgleichung (135)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = (n+1)n\varphi. \tag{136a}$$

Das gleiche Ergebnifs würde sich finden, wenn man an Stelle des Factors $\frac{1}{r^{n+1}}$ in Gleichung (136) den Factor r^n gesetzt hätte, welcher ja ebenfalls die Kugelfunction in ein Integral der LAPLACE'schen Differentialgleichung verwandelt. Es ist nämlich

$$\frac{d}{dr}(r^n) = n r^{n-1}$$

$$r^2\frac{d}{dr}(r^n) = n r^{n+1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}(r^n)\right) = n(n+1)r^n.$$

Die Variabele μ steckt nur in $P_{nm} \cdot \sqrt{1-\mu^2}^m$ und es ist:

$$\frac{d}{d\mu}\left(P_{nm}\sqrt{1-\mu^2}^m\right) = \frac{dP_{nm}}{d\mu}\sqrt{1-\mu^2}^m - m P_{nm}\mu\sqrt{1-\mu^2}^{m-2}$$

$$(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\left(P_{nm}\sqrt{1-\mu^2}^m\right)$$
$$= \frac{dP_{nm}}{d\mu}\sqrt{1-\mu^2}^{m+2} - m P_{nm}\mu\sqrt{1-\mu^2}^m$$

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\left(P_{nm}\sqrt{1-\mu^2}^m\right)\right) =$$

$$\frac{d^2 P_{nm}}{d\mu^2}\sqrt{1-\mu^2}^{m+2} - 2(m+1)\frac{dP_{nm}}{d\mu}\mu\sqrt{1-\mu^2}^m - m P_{nm}\sqrt{1-\mu^2}^m + m^2 P_{nm}\mu^2\sqrt{1-\mu^2}^{m-2}$$

oder etwas anders geformt

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\left(P_{nm}\sqrt{1-\mu^2}^m\right)\right)$$
$$= P_{nm}\sqrt{1-\mu^2}^m\left\{\frac{1}{P_{nm}}\frac{d^2P_{nm}}{d\mu^2}(1-\mu^2) - \frac{2(m+1)}{P_{nm}}\frac{dP_{nm}}{d\mu}\mu - m - m^2 + \frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}.$$

Also wird das zweite Glied der Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) \\ &= \varphi\left\{\frac{1}{P_{nm}}\frac{d^2P_{nm}}{d\mu^2}(1-\mu^2) - \frac{2(m+1)}{P_{nm}}\frac{dP_{nm}}{d\mu}\mu - m(m+1) + \frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (136\,b)$$

Die Variabele η endlich kommt nur in $\cos(m\eta - c)$ vor und es ist

$$\frac{d^2\cos(m\eta - c)}{d\eta^2} = -m^2\cos(m\eta - c).$$

Also wird das dritte Glied der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = -\varphi\frac{m^2}{1-\mu^2}. \quad (136\,c)$$

Alle drei Theile (136 a, b und c) enthalten die ganze Function φ als gemeinsamen Factor, den wir wegen der Null auf der rechten Seite der LAPLACE'schen Differentialgleichung weglassen dürfen. Ferner sieht man, daſs das dritte Glied (136 c) sich gegen den letzten

Summanden des zweiten Gliedes (136b) weghebt. Wenn man den ganzen Ausdruck noch mit $P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$ multiplicirt und beachtet, dafs

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)-\mathfrak{m}(\mathfrak{m}+1)=(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})(\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+1)$$

ist, so erhält man das Ergebnifs:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu^2}-2(\mathfrak{m}+1)\mu\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu}+(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})(\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+1)P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}=0. \quad (137)$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für $P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$ als Function der Variabelen μ mit zwei natürlichen Zahlen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ ($\gtreqless \mathfrak{n}$) als Parametern. Die im § 39 bereits betrachteten und durch einige Repräsentanten in der Tabelle (132b) veranschaulichten Functionen $P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$ müssen ihre Integrale sein, es ist aber nicht gesagt, dafs dieser Differentialgleichung hier nicht noch andere Functionen genügen und dafs sie in Bezug auf die Zahlen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ an die Bedingungen ihrer Entstehung gebunden ist.[1])

Zuerst leiten wir aus (137) eine Beziehung ab zwischen den $P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$ mit gemeinsamem $\mathfrak{n}$, aber verschiedenem $\mathfrak{m}$, und differenziren zu diesem Zwecke die vorstehende Gleichung nach μ. Dies giebt zunächst ohne Zusammenfassung der entstehenden Glieder:

$$\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{d^3P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu^3}-2\mu\frac{d^2P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu^2}\\ -2(\mathfrak{m}+1)\mu\frac{d^2P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu^2}-2(\mathfrak{m}+1)\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu}\\ +(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})(\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+1)\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu}=0.\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$-2(\mathfrak{m}+1)+(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})(\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+1)\equiv(\mathfrak{n}-\mathfrak{m}-1)(\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+2).$$

Das Resultat ist also darstellbar in der Form:

$$\left.\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{d^2\left[\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu}\right]}{d\mu^2}-2([\mathfrak{m}+1]+1)\frac{d\left[\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu}\right]}{d\mu}\\ +(\mathfrak{n}-[\mathfrak{m}+1])(\mathfrak{n}+[\mathfrak{m}+1]+1)\left[\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu}\right]=0.\end{aligned}\right\} \quad (138)$$

Man erkennt, dafs diese Formel dieselbe Bildung besitzt, wie die vorige (137), nur steht hier $[\mathfrak{m}+1]$, wo dort $\mathfrak{m}$ stand, und hier

[1]) Erweiterung der Bedeutung von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ später, in § 46.

$\left[\frac{\partial P_{nm}}{\partial \mu}\right]$, wo dort P_{nm} stand. Wir haben also hier die Differentialgleichung für $P_{n,m+1}$ erhalten, und sehen zugleich, dafs die Function $\frac{d P_{nm}}{d \mu}$ ihr genügt. Wir können defshalb, freilich zunächst noch immer unter Freihaltung eines wegen der linearen Homogenität der Differentialgleichung unbestimmten constanten Factors folgendes Gesetz aufstellen:

$$P_{n,m+1} = \text{const} \cdot \frac{d P_{nm}}{d \mu}$$

oder

$$P_{nm} = \text{const} \cdot \frac{d P_{n,m-1}}{d \mu}. \tag{138a}$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Gesetzes finden wir schliefslich

$$P_{nm} = \text{const} \cdot \frac{d^m P_{n0}}{d \mu^m}. \tag{138b}$$

Es genügt daher Integrale der Differentialgleichung (137) für den Fall $m = 0$ zu suchen, die Uebrigen ergeben sich dann aus dieser Formel. Die Gleichung lautet für $m = 0$:

$$(1 - \mu^2)\frac{d^2 P_{n0}}{d \mu^2} - 2 \mu \frac{d P_{n0}}{d \mu} + n(n+1) P_{n0} = 0. \tag{139}$$

Auch wenn wir noch nicht wüfsten, dafs es nach ganzen Potenzen von μ fortschreitende P_{n0} giebt (die erste Zeile der Tabelle (132b) zeigt die ersten Vertreter), könnte man versuchen, diese Differentialgleichung zu integriren, indem man eine Potenzreihe ansetzt von der Form

$$P_{n0} = A_0 + A_1 \mu + A_2 \mu^2 + A_3 \mu^3 + \ldots + A_a \mu^a + \ldots \tag{140}$$

Dann ist

$$\frac{d P_{n0}}{d \mu} = 1 A_1 + 2 A_2 \mu + 3 A_3 \mu^2 + 4 A_4 \mu^3 + \ldots + (a+1) A_{a+1} \mu^a + \ldots$$

$$\frac{d^2 P_{n0}}{d \mu^2} = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 \mu + 4 \cdot 3 \cdot A_4 \mu^2 + 5 \cdot 4 \cdot A_5 \mu^3 + \ldots$$
$$+ (a+2)(a+1) A_{a+2} \mu^a + \ldots$$

Ordnet man hiernach den Ausdruck (139) nach Potenzen von μ, so erhält man:

$$[2 \cdot 1 A_2 + n(n+1) A_0] \mu^0$$
$$+ [3 \cdot 2 A_3 + \{n(n+1) - 2\} A_1] \mu$$
$$+ [4 \cdot 3 A_4 + \{n(n+1) - 2 \cdot 1 - 4\} A_2] \mu^2$$

$$+ [5 \cdot 4 A_5 + \{n(n+1) - 3 \cdot 2 - 6\} A_3] \mu^3$$
$$+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$+ [(a+2)(a+1) A_{a+2} + \{n(n+1) - a(a-1) - 2a\} A_a] \mu^a$$
$$+ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot = 0.$$

Der Coefficient von μ^a, den man auch schreiben kann:

$$[(a+2)(a+1) A_{a+2} + (n-a)(n+a+1) A_a],$$

stellt bereits von $a = 0$ an die richtigen Werthe dar. Soll diese Reihe nun für jeden Werth der Variabelen μ gleich Null sein, so ist das nur möglich, wenn jeder einzelne Coefficient verschwindet. Wir erhalten daraus eine Reihe von Bedingungen, durch welche jedes A_{a+2} auf das zwei Stufen niedrigere A_a zurückgeführt wird. Man kann diese Bedingungen in der Form hinschreiben:

$$A_{a+2} = \frac{(-n+a)(n+a+1)}{(a+1)(a+2)} A_a. \tag{141}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dafs der Coefficient A_{n+2} verschwindet, weil der im Zähler der rechten Seite stehende Factor $(-n+a)$ für $a = n$ verschwindet. In Folge dessen müssen aber alle alternirend folgenden Coefficienten ebenfalls verschwinden:

$$A_{n+2} = A_{n+4} = A_{n+6} = \ldots = 0. \tag{141a}$$

Die dazwischen stehenden Coefficienten $A_{n+1}, A_{n+3}, A_{n+5}, \ldots$ verschwinden aber nicht, sondern bilden eine in's Unendliche fortlaufende Reihe. Die in Gleichung (140) angesetzte Lösung zerfällt daher in folgende zwei Bestandtheile: Eine ganze Function $n$ten Grades von μ, welche, beginnend mit dem höchsten Gliede, sowohl für gerade wie für ungerade Zahlen n immer die Form hat:

$$P_{n0} = A_n \mu^n + A_{n-2} \mu^{n-2} + A_{n-4} \mu^{n-4} + \ldots \tag{142}$$

Diese hat, je nach der Zahl n, entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von μ, endigt also entweder mit einer Constanten A_0, oder mit einem linearen Gliede $A_1 \mu$.

Dazu tritt als zweiter Bestandtheil eine unendliche Reihe, welche man nur nach steigenden Potenzen von μ ordnen kann, und welche für gerades n lautet:

$$Q_{n0} = A_1 \mu + A_3 \mu^3 + A_5 \mu^5 + \ldots \text{ in infinitum} \tag{143}$$

während für ungerades n

$$Q_{n,0} = A_0 + A_2 \mu^2 + A_4 \mu^4 + \ldots \text{ in infinitum} \tag{144}$$

zu setzen ist.

Die Bedingung (141) zeigt, daſs sowohl unter den Coefficienten des geschlossenen Ausdrucks (142), wie unter den Coefficienten der unendlichen Reihe (143) resp. (144) nur je ein einziger willkürlich gewählt werden kann, während alle anderen dadurch zugleich festgelegt werden. Unsere Lösung enthält also zwei disponible Constanten, stellt daher das vollständige Integral der Differentialgleichung (139) dar.

Je nachdem man eine oder die andere dieser beiden Constanten gleich Null festsetzt, erhält man entweder nur den geschlossenen Ausdruck (142) oder nur die unendliche Reihe (143) oder (144) als particuläre Lösung. Der Vergleich mit den früheren Betrachtungen zeigt sofort, daſs nur die ersteren Formen (142) uns die gesuchten Grundformen für die Kugelfunctionen P_{n0} liefern, von denen in der obersten Zeile der Tabelle (132b) die ersten Vertreter angeführt sind. Die unendlichen Reihen liefern indessen ebenfalls brauchbare Integrale, transcendente Functionen von μ, aus welchen man Potentiale eigenartiger Elektricitätsvertheilungen gewinnen kann, mit denen wir uns später in § 45 beschäftigen wollen.

Als den willkürlich bleibenden Factor der endlichen Reihe vom $n$ten Grade wählen wir denjenigen des höchsten Gliedes, A_n, und berechnen aus ihm die niedrigeren. Dazu müssen wir die Bedingungsgleichung (141) umstellen, wie folgt:

$$A_a = \frac{(a+1)(a+2)}{(-n+a)(n+a+1)} A_{a+2}.$$

Gehen wir um eine Ordnungszahl tiefer, schreiben also $a-2$ an Stelle von a, so nimmt sie die Form an

$$A_{a-2} = \frac{a(a-1)}{(-n+a-2)(n+a-1)} A_a. \tag{145}$$

Daraus ergiebt sich folgende Reihe von Coefficienten

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= A_n \text{ (frei verfügbar)} \\
A_{n-2} &= \frac{n(n-1)}{(-2)(2n-1)} A_n \\
A_{n-4} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(-2)(-4)(2n-1)(2n-3)} A_n \\
A_{n-6} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{(-1)^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n-1)(2n-3)(2n-5)} A_n \\
\vdots\;\; & \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \tag{145a}$$

Ist $\mathfrak{n}$ eine gerade Zahl, so heifst der niedrigste Coefficient

$$A_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot \ldots (n-2) \cdot n \cdot (2n-1)(2n-3) \ldots (n+3)(n+1)} A_n ,$$

ist $\mathfrak{n}$ eine ungerade Zahl, so heifst der niedrigste Coefficient:

$$A_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot \ldots (n-3)(n-1)(2n-1)(2n-3) \ldots (n+4)(n+2)} A_n .$$

Um nun den gesuchten Kugelfunctionen P_{n0} bestimmte Zahlenwerthe zu geben, die ihnen ja weder durch ihre Herleitung aus Lösungen der Laplace'schen Differentialgleichung noch durch die Differentialgleichung (139) eigen sind, da wir dabei immer einen unbestimmten constanten Factor mitzuführen hatten [vgl. den Zahlenfactor k_{nm} in Gleichung (132) und hier unser A_n], so bestimmt man A_n so, dafs die Kugelfunctionen P_{n0} für den im Pol der Kugelcoordinaten eintretenden Cosinuswerth $\mu = 1$ alle den Werth 1 annehmen, im Uebrigen daher stets zwischen $+1$ und -1 liegen müssen, so lange μ als Cosinus eines reellen Polarwinkels echt gebrochen bleibt. Dies erreicht man, indem man festsetzt, es solle sein

$$A_n = + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{n!} . \tag{146}$$

Dadurch werden die P_{n0} zahlenmäfsig angebbare Functionen. Ihre allgemeine Gleichung ist nach den Formeln (142), (145a) und nach der Festsetzung (146) folgende:

$$\left. \begin{aligned} P_{n0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots n} \Big\{ \mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mu^{n-2} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - + \ldots \end{aligned} \right\} \tag{147}$$

Berechnet man die Zahlenwerthe für eine hinreichende Reihe von Werthen μ, untersucht auch die Nullstellen, d. h. die Wurzeln μ der Gleichung $\mathfrak{n}$ ten Grades, welche durch Nullsetzung der geschweiften Klammer entsteht, sucht die Maxima und Minima auf etc., so kommt man zu Verläufen, welche in graphischer Darstellung für die sechs niedrigsten Zahlen $\mathfrak{n}$ in den Diagrammen Figur 17 wiedergegeben sind.

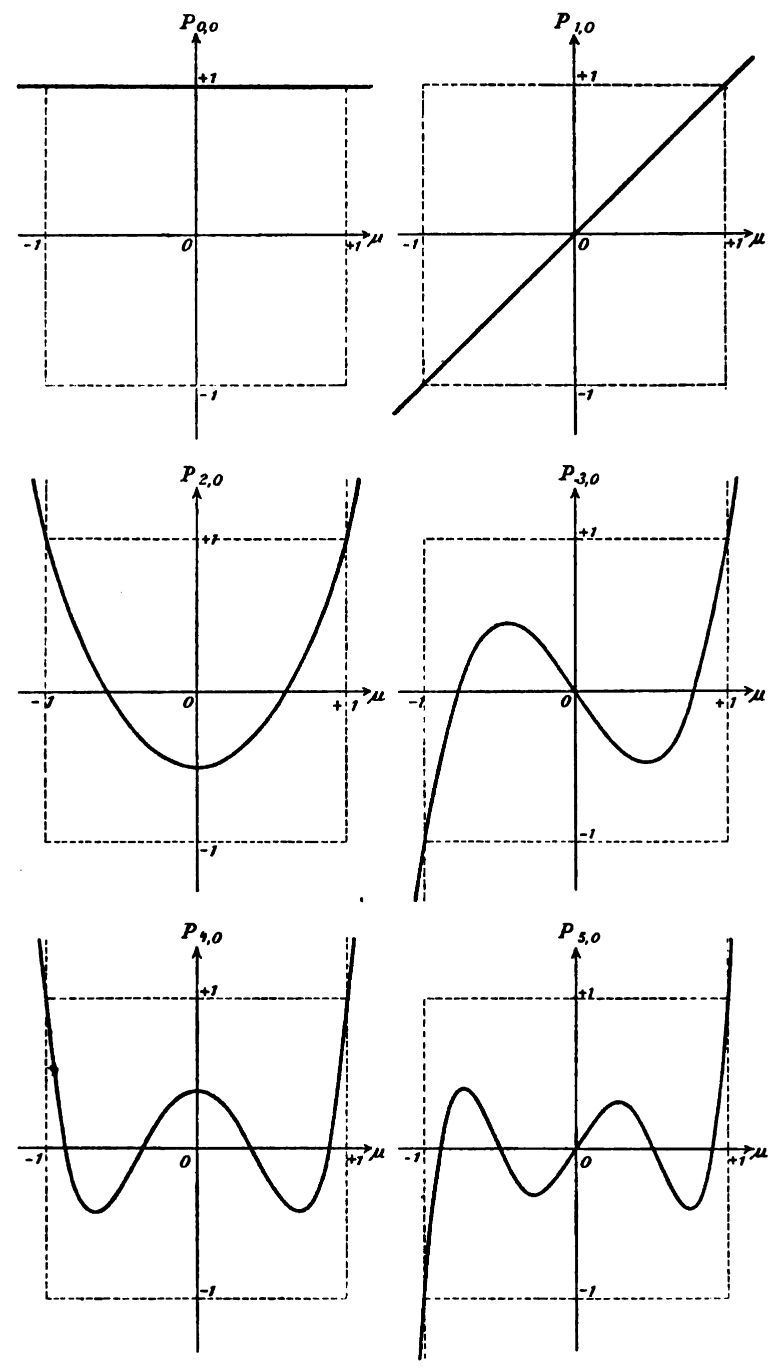


Fig. 17.

Die Gleichungen dieser Curven sind:

$$\left.\begin{aligned}
P_{0\,0} &= 1\\
P_{1,0} &= \mu\\
P_{2,0} &= \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}\\
P_{3,0} &= \frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu\\
P_{4,0} &= \frac{35}{8}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{8}\\
P_{5,0} &= \frac{63}{8}\mu^5 - \frac{35}{4}\mu^3 + \frac{15}{8}\mu\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{147 a}$$

Es läfst sich unschwer für das allgemeine $P_{n,0}$ beweisen, dafs es seine n Nullstellen, seine $n-1$ Maxima und Minima, $n-2$ Inflexionspunkte, alle reell in dem Intervall $-1 < \mu < +1$ besitzt, dafs die Curven also aufserhalb ± 1 direct in's Unendliche hinauf- resp. hinabsteigen.

Für die $P_{n,m}$ erhält man ebenfalls feste Zahlenwerthe, wenn man in der zu ihrer directen Berechnung nützlichen Formel (138 b) die Constante rechts gleich 1 setzt, also fordert

$$P_{n,m} = \frac{d^m}{d\mu^m} P_{n,0}. \tag{148}$$

Daraus ergeben sich folgende beispielsweise angeführten Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{llll}
P_{1,1} = 1, \quad P_{2,1} = 3\mu, & P_{3,1} = \frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}, & P_{4,1} = \frac{35}{2}\mu^3 - \frac{15}{2}\mu, & \ldots\\
\qquad\quad P_{2,2} = 3, & P_{3,2} = 15\mu, & P_{4,2} = \frac{105}{2}\mu^2 - \frac{15}{2}, & \ldots\\
 & P_{3,3} = 15, & P_{4,3} = 105\mu, & \ldots\\
 & & P_{4,4} = 105, & \ldots
\end{array}\right\} \tag{148a}$$

Die Allgemeinheit der Kugelfunctionen $K_{n,m}$ mit ihren $(2n+1)$ verfügbaren Constanten wird durch diese eindeutigen Zahlenfestsetzungen nicht beschränkt, da wir ja bereits in den Gleichungen (132 a) diese als $A_{n,m}$ und $B_{n,m}$ oder als $C_{n,m}$ und $c_{n\,m}$ freigehalten haben; nur die in (131 a), (131 b) und (132) und in der Tabelle (132 b) zugesetzten Factoren $k_{n,m}$ erhalten vorgeschriebene Zahlenwerthe, die man leicht ermitteln könnte, wo es von Wichtigkeit wäre. Es sei

hier nur angeführt, dafs der Factor $k_{n,n}$ in Gleichung (132 c) den Werth annimmt:

$$k_{n\,n} = (-2)^n \,. \tag{149}$$

§ 42. Darstellung einer willkürlichen Function der Richtungswinkel im Raume durch eine Kugelfunctionenreihe.

Eine wichtige Bedeutung der Kugelfunctionen für die Potentialtheorie besteht, wie aus den bisherigen Ausführungen ersichtlich, darin, dafs man aus ihnen auf zwei Weisen: entweder durch Division mit r^{n+1} oder durch Multiplication mit r^n, Integrale der LAPLACE'schen Differentialgleichung gewinnen kann, und dafs auch Summen mehrerer, vieler, ja convergente Reihen unendlich vieler solcher Gebilde als Potentialfunctionen in ladungsfreien Raumgebieten gedeutet werden können.

Wir kommen jetzt zu einer anderen hervorragenden Eigenschaft der Kugelfunctionen, durch welche in Verbindung mit der vorher erwähnten es möglich wird, jede an einer Kugelfläche willkürlich vorgeschriebene Werthvertheilung stetig durch den inneren und den äufseren Raum so fortzusetzen, wie dies von dem Potential einer elektrischen Flächenbelegung der Kugel gefordert werden mufs. Diese neue Eigenschaft ist folgende: Man kann durch die convergirende Summe einer eventuell unendlichen Reihe von Kugelfunctionen in einer der beiden Normalformen (132 a), also durch einen Ausdruck von der Form

$$f(\mu, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} (A_{n\,m} \cos m\,\eta + B_{n\,m} \sin m\,\eta) \tag{150}$$

oder von der gleichbedeutenden Form

$$f(\mu, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \cdot C_{n\,m} \cos(m\,\eta - c_{n\,m}) \tag{150 a}$$

jeder willkürlich vorgeschriebenen Werthvertheilung einer Function der beiden Polarcoordinaten ϑ und η, oder was dasselbe bedeutet, jeder Function von μ und η beliebig nahe kommen, wobei natürlich der Variabele μ auf das Intervall -1 bis $+1$ (die Poldistanz ϑ liegt zwischen 0 und π), die Variabele η auf einen einmaligen Umkreis, sagen wir auf das Intervall 0 bis 2π zu beschränken ist. Um Bedenklichkeiten gegen diesen Ansatz zu entgehen, wollen wir nur annehmen — was in physikalischem Sinne immer zulässig sein

dürfte —, dafs Unstetigkeiten bei dieser vorgeschriebenen Function entweder nicht vorkommen oder doch als sehr steile aber continuirliche Uebergänge angesehen werden dürfen, und dafs ferner die vorgeschriebenen Werthe für keine Richtung des Raumes unendlich werden. Die Eindeutigkeit der Function ist eine selbstverständliche Vorbedingung, da die Kugelfunctionen einzeln, also auch in Summe eindeutige Werthe liefern. Vom Radiusvector r der Polarcoordinaten müssen die durch (149) darstellbaren Functionen natürlich auch unabhängig sein, wie es die Kugelfunctionen sind. Man kann sich daher die willkürliche Function dadurch versinnlichen, dafs man um den Nullpunkt eine Kugel von beliebigem Radius legt und auf jeder Stelle ihrer Oberfläche topographisch den Werth verzeichnet, welcher auf dem dadurch betroffenen Strahl herrschen soll. Man könnte etwa so, wie auf Landkarten die Darstellung der Hebungen und Senkungen des Terrains durch Isohypsen üblich ist, die Richtungen, in denen die willkürliche Function kein Gefälle zeigt, durch Linienschaaren angeben, welche sich nirgends durchschneiden können und die Stellen der Maxima und Minima ringförmig umgeben. Dieselbe Darstellung ist auch zur Veranschaulichung der einzelnen Kugelfunctionen nützlich, welche jede eine ganz bestimmte regelmäfsige Werthvertheilung besitzt. Die Stellen, wo eine einzelne Kugelfunction gleich Null wird, liegen auf Parallelkreisen und auf äquidistanten Meridianen, deren Anzahl durch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ bestimmt wird. In den einzelnen hierdurch abgegrenzten Feldern sind die Werthe abwechselnd positiv und negativ, um ein in der Mitte jedes Feldes liegendes Maximum oder Minimum angeordnet.

Dafs man durch Superposition vieler solcher Vertheilungen unter Verfügung über zwei Reihen von Coefficienten (A und B oder auch C und c) eine grofse Mannigfaltigkeit herstellen kann, leuchtet ein; dafs man aber jedem gewünschten Verlauf beliebig nahe kommen kann, bedarf vom streng mathematischen Standpunkt eines Beweises, nämlich eines Nachweises der Convergenz der unendlichen Reihe (150) gegen die geforderten Functionswerthe. Dirichlet und auf anderem Wege Sir W. Thomson haben diesen Beweis geführt. Die Sache liegt analog wie bei den Fourier'schen Reihen, nur ist das Problem hier wegen der zwei Variabelen μ und η noch complicirter.

Wir wollen uns hier damit begnügen, zu zeigen, wie man für jede willkürlich vorgeschriebene Function $f(\mu, \eta)$ die zwei Reihen von Coefficienten thatsächlich berechnen kann.

Von den beiden Formen (150) und (150a) ist die zweite die

anschaulichere, weil sie zeigt, dafs der Einflufs oder die Stärke eines einzelnen Gliedes der Reihe nur von einer Amplitude $C_{n\,m}$ bestimmt wird, während von der Phasenconstante $c_{n\,m}$ nur die Lage der Nullmeridiane der einzelnen Kugelfunction abhängt. Die eigenartige Werthvertheilung der einzelnen Kugelfunction erscheint nämlich als drehbar um die Polaraxe, ihre Stellung wird durch $c_{n\,m}$ festgelegt. Für die Auswerthung der Coefficienten ist aber die erstere Schreibweise (150) mit zwei gleichartigen Reihen von Amplituden $A_{n\,m}$ und $B_{n\,m}$ die allein geeignete. Man kann ja nachträglich, nachdem man die A und B gefunden hat, leicht die C und c daraus bilden.

Wir wollen nun den Werth eines bestimmten Coefficienten $A_{\mathfrak{k}.\,\mathfrak{i}}$ berechnen. Zu dem Zwecke erweitern wir die Gleichung (150) mit

$$P_{\mathfrak{k},\,\mathfrak{i}}\sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}}\cos \mathfrak{i}\,\mu,$$

d. h. mit eben dem elementaren Bestandtheile jener unendlichen Doppelsumme von Kugelfunctionen (150), welcher durch den gesuchten Coefficienten $A_{\mathfrak{k}.\,\mathfrak{i}}$ angeführt wird. Sodann multipliciren wir noch mit dem Flächenelement der Einheitskugel und integriren den gewonnenen Ausdruck über diese ganze Fläche.

Das Flächenelement hat, in den Polarcoordinaten ϑ und μ ausgedrückt, den Werth

$$d\sigma = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\eta$$

und die Integration erstreckt sich für den Polwinkel ϑ von 0 bis π, für den Längenwinkel η von 0 bis 2π.

Da hier nun $\mu = \cos\vartheta$ als Variabele statt ϑ eintritt, und

$$d\mu = -\sin\vartheta\, d\vartheta$$

ist, gilt

$$d\sigma = -d\mu\cdot d\eta$$

und die Variabele μ läuft in dem Integral von $+1$ bis -1. Der Werth der Oberfläche der Einheitskugel ist also

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\eta = \int_{+1}^{-1}\int_0^{2\pi}(-\,d\mu)\cdot d\eta = \int_{-1}^{+1}d\mu\int_0^{2\pi}d\eta = 2\cdot 2\pi = 4\pi.$$

Die vorher beschriebenen Operationen an (150) führen also zu der Formel:

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_{-1}^{+1} d\mu \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta \cdot f(\mu\,\eta) \cdot P_{\mathfrak{k},\mathfrak{i}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}} \cos\mathfrak{i}\,\eta \\ = \int\limits_{-1}^{+1} d\mu \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta \left\{ \sum\limits_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} \sum\limits_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}+\mathfrak{m}} (A_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cos\mathfrak{i}\eta \cos\mathfrak{m}\eta + B_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cos\mathfrak{i}\eta \sin\mathfrak{m}\eta) \right\}. \end{array}\right\} \quad (151)$$

Dabei sind bereits die von den laufenden Ordnungszahlen $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ unabhängigen Factoren mit den festen Zahlen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}$ unter das Doppelsummenzeichen gesteckt, eine Operation, die man sich auch bei unendlichen Summen stets erlauben darf. Nun aber machen wir eine weitere Umformung, welche nur erlaubt ist, wenn sowohl vorher wie nachher unbedingt convergente Reihen im Spiele sind: Wir vertauschen die Reihenfolge der Operationen $\int\int$ und $\sum\sum$, führen also die Integration über die Kugelfläche gliedweise an den einzelnen Summanden der Doppelsumme aus. Bezeichnen wir der Kürze wegen die linke Seite der vorstehenden Gleichung (151) mit L, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l} L = \sum\limits_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} \sum\limits_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{n}} \left\{ \int\limits_{-1}^{+1} d\mu\, P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}+\mathfrak{m}} \right. \\ \left. \qquad \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, (A_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} \cos\mathfrak{i}\eta \cdot \cos\mathfrak{m}\eta + B_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} \cos\mathfrak{i}\eta \sin\mathfrak{m}\eta) \right\}. \end{array}\right\} \quad (151\,\mathrm{a})$$

Hierbei ist das Doppelintegral über jeden einzelnen Summanden, entsprechend der Abhängigkeit seiner einzelnen Factoren von μ allein und von η allein, bereits in das Product zweier einfacher Integrale zerlegt. Letztere sind nun für jedes Zahlenpaar $\mathfrak{n} \geqq \mathfrak{m}$, und für das feste Zahlenpaar $\mathfrak{k} \geqq \mathfrak{i}$ aufzusuchen.

Das hintere Integral über den Längenwinkel η ist mit einziger Ausnahme des Falles $\mathfrak{m} = \mathfrak{i}$ für alle anderen Zahlen $\mathfrak{m}$ gleich Null. In dem Falle $\mathfrak{m} = \mathfrak{i} > 0$ hat es folgenden Werth:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, (A_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}} \cos^2\mathfrak{i}\,\eta + B_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}} \cos\mathfrak{i}\,\eta \sin\mathfrak{i}\,\eta) = \pi \cdot A_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}, \quad (152)$$

welcher aber für $\mathfrak{m} = \mathfrak{i} = 0$ durch den abweichenden Werth

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, A_{\mathfrak{n}0} = 2\,\pi \cdot A_{\mathfrak{n}0} \quad (152\,\mathrm{a})$$

zu ersetzen ist.

Diese Formeln (152) sind auf elementarste Weise herleitbar und kommen in gleicher Weise bei der Berechnung der Coefficienten der FOURIER'schen Reihe zur Anwendung.

Von der Doppelreihe (151) bleibt also nur eine einfache Reihe über die Zahlen $\mathfrak{n}$ bestehen, behaftet mit den Factoren $\pi A_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}$ oder im Sonderfall mit $2\pi A_{\mathfrak{n}0}$:

$$L = {}^{*)}\pi \sum_{\mathfrak{n}=0}^{\infty} \left\{ A_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}} \int_{-1}^{+1} d\mu\, P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\, P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}} \cdot (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}} \right\}. \tag{153}$$

*) Für $\mathfrak{i}=0$ mufs 2π statt π eintreten.

Zu bemerken ist, dafs jetzt nur noch die Producte von je zwei P-Functionen mit gleichem $\mathfrak{m}=\mathfrak{i}$ vorkommen, und dafs wegen $\mathfrak{i}+\mathfrak{m}=2\mathfrak{i}$ die Irrationalität von $\sqrt{1-\mu^2}$ aufgehoben ist.

Diese μ-Integrale in (153) sind nun, mit Ausnahme des Falles $\mathfrak{n}=\mathfrak{k}$, ebenfalls für alle Zahlen $\mathfrak{n}$ gleich Null. Zum Beweise dessen können wir uns freilich nicht auf elementare Integralformeln berufen, wir müssen vielmehr den Beweis auf Grund der Definitionen der $P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ führen.

Die erste Einführungsform (132) dieser Functionen würde ungeschickt zu diesem Zwecke sein. Dagegen kommt man bequem zum Ziele, wenn man die Differentialgleichung (137) für die $P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ heranzieht. Diese lautet für $\mathfrak{m}=\mathfrak{i}$:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu^2} - 2(\mathfrak{i}+1)\mu\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu} + (\mathfrak{n}-\mathfrak{i})(\mathfrak{n}+\mathfrak{i}+1)P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}} = 0.$$

Um im letzten Gliede den Integrandus aus (153) herzustellen, erweitern wir die Gleichung mit $P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}}$. Dadurch entsteht aber zugleich in den beiden vorderen Gliedern ein vollständiger Differentialquotient, denn es ist:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1}\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu}\right] = (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1}\frac{d^2P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu^2} - 2\mu(\mathfrak{i}+1)(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}}\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu}.$$

Unsere Differentialgleichung lautet also nun:

$$P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\cdot\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1}\frac{dP_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu}\right] + (\mathfrak{n}-\mathfrak{i})(\mathfrak{n}+\mathfrak{i}+1)P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}} = 0.$$

Nun multipliciren wir mit $d\mu$ und integriren von -1 bis $+1$.

Dann kann man das vordere Integral durch partielle Integration umformen

$$\int P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}} \left[(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1} \frac{d P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu} \right] d\mu$$

$$= \overline{\underline{P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}} (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1} \frac{d P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu}}} - \int (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1} \frac{d P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu} \frac{d P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}}}{d\mu} \, d\mu.$$

Der integrirte Theil verschwindet wegen $(1-\mu^2)$ an beiden Grenzen. Im Restintegral ist noch wegen Gleichung (138a) und wegen der am Schluſs von § 41 gemachten Festsetzung der Constanten in dieser Gleichung:

$$\frac{d P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}}{d\mu} = P_{\mathfrak{n},\mathfrak{i}+1}, \qquad \frac{d P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}}}{d\mu} = P_{\mathfrak{t},\mathfrak{i}+1}.$$

Wir erhalten also das Resultat:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{n},\mathfrak{i}+1} \cdot P_{\mathfrak{t},\mathfrak{i}+1} (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1} d\mu \\ &\qquad = (\mathfrak{n}-\mathfrak{i})(\mathfrak{n}+\mathfrak{i}+1) \int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{n},\mathfrak{i}} \cdot P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}} (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}} d\mu. \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

Da $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{t}$ zwei beliebige Ordnungszahlen sind, so muſs diese Gleichung auch gelten, wenn man $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{t}$ vertauscht. Dabei bleiben aber beide Integrale unverändert, nur der Zahlenfactor auf der rechten Seite nimmt jetzt den Ausdruck $(\mathfrak{t}-\mathfrak{i})(\mathfrak{t}+\mathfrak{i}+1)$ an, ändert also seinen Werth, falls nicht gerade $\mathfrak{t} = \mathfrak{n}$ ist. Daraus ergiebt sich aber nothwendig, daſs beide Integrale verschwinden müssen, wenn $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ verschieden sind:

$$\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}} \cdot P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}} (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}} d\mu = 0 \text{ für } \mathfrak{n} \lessgtr \mathfrak{t}. \tag{155}$$

Von der Summe über $\mathfrak{n}$ in der Formel (153) bleibt also nur das eine Glied $\mathfrak{n} = \mathfrak{t}$ übrig:

$$L = {}^{*})\pi \cdot A_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}} \cdot \int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{t}\mathfrak{i}}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}} d\mu. \tag{156}$$

*) Für $\mathfrak{i} = 0$ muſs 2π statt π eintreten.

Dieses eine Glied kann nicht verschwinden, da das Integral über einen durchweg positiven Werth erstreckt ist, diesen Betrag zu ermitteln, ist unsere nächste Aufgabe.

Man kann die Beziehung (154), nachdem man darin $\mathfrak{n} = \mathfrak{l}$ gesetzt hat, als eine Recursionsformel für diese Integrale entweder bei steigendem oder sinkendem Index $\mathfrak{i}$ benutzen. Wir kommen schneller zum Ziele, wenn wir steigende $\mathfrak{i}$ benutzen. Nun kann der zweite Index höchstens den Werth des ersten Index $\mathfrak{l}$ erreichen. Wir setzen also in der Formel (154) successive $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}+1$, $\mathfrak{i}+2$, ... bis $\mathfrak{l}-1$, und erhalten:

$$\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l},\mathfrak{i}}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}}\, d\mu = \frac{1}{(\mathfrak{l}-\mathfrak{i})(\mathfrak{l}+\mathfrak{i}+1)} \int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l},\mathfrak{i}+1}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1}\, d\mu$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l},\mathfrak{i}+1}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+1}\, d\mu = \frac{1}{(\mathfrak{l}-\mathfrak{i}-1)(\mathfrak{l}+\mathfrak{i}+2)} \int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l},\mathfrak{i}+2}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}+2}\, d\mu$$

. . . .

$$\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}-1}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{l}-1}\, d\mu = \frac{1}{1\cdot 2\mathfrak{l}} \int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{l}}\, d\mu .$$

Durch Multiplication der ganzen Schaar folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}^2 (1-\mu^2)^{\mathfrak{i}}\, d\mu \\ &= \frac{1}{[1\cdot 2 \ldots (\mathfrak{l}-\mathfrak{i})]\,[(\mathfrak{l}+\mathfrak{i}+1)(\mathfrak{l}+\mathfrak{i}+2)\ldots 2\mathfrak{l}]} \int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}}^2 \cdot (1-\mu^2)^{\mathfrak{l}}\, d\mu . \end{aligned}\right\} \quad (156\text{a})$$

In dem rechts übrig gebliebenen Integral ist $P_{\mathfrak{l}\mathfrak{l}}^2$ nur ein constanter Factor. Es ist nämlich

$$P_{\mathfrak{n}\mathfrak{n}} = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2\mathfrak{n}-1).$$

Dies erkennt man aus (148), wenn man bedenkt, daſs beim $\mathfrak{n}$fachen Differenziren des Ausdrucks $P_{\mathfrak{n}0}$ in (147) nur noch die Spuren des höchsten Gliedes $\mu^{\mathfrak{n}}$ übrig bleiben, und daſs

$$\frac{d^{\mathfrak{n}}(\mu^{\mathfrak{n}})}{d\mu^{\mathfrak{n}}} = \mathfrak{n}(\mathfrak{n}-1)\ldots 2\cdot 1$$

ist. Man sieht es auch aus den in (148a) angeführten ersten Vertretern

$$P_{1,1} = 1, \quad P_{2,2} = 3, \quad P_{3,3} = 15, \quad P_{4,4} = 105, \ldots$$

Den constanten Factor kann man aus dem Integrale herausziehen und es bleibt schliefslich nur folgendes Integral zu berechnen übrig

$$\int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\, d\mu\,.$$

Da müssen wir nun, nachdem wir bei der höchsten Stufe $\mathfrak{f}$ die P^2 aus dem Integral hinausgeworfen haben, mit einer recurrenten Formel wieder hinunter steigen. Diese Formel gewinnt man so: Es ist:

$$d\left[(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\cdot\mu\right] = (1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\, d\mu - 2\,\mathfrak{f}\,(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}-1}\,\mu^2\, d\mu$$

oder wenn man $\mu^2 \equiv 1-(1-\mu^2)$ setzt

$$d\left[(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\cdot\mu\right] = (2\,\mathfrak{f}+1)\cdot(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\, d\mu - 2\,\mathfrak{f}\,(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}-1}\, d\mu\,.$$

Dies von -1 bis $+1$ integrirt, giebt:

$$\overline{\underline{\left[(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\cdot\mu\right]}}_{-1}^{+1} = (2\,\mathfrak{f}+1)\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\, d\mu - 2\,\mathfrak{f}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}-1}\, d\mu\,.$$

Die linke Seite verschwindet an beiden Grenzen, die Integrale rechts sind von der gesuchten Art. Man findet daher:

$$\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\, d\mu = \frac{2\,\mathfrak{f}}{2\,\mathfrak{f}+1}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}-1}\, d\mu$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}-1}\, d\mu = \frac{2\,\mathfrak{f}-2}{2\,\mathfrak{f}-1}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}-2}\, d\mu\,.$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^2\, d\mu = \tfrac{4}{5}\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)\, d\mu$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)\, d\mu = \tfrac{2}{3}\int_{-1}^{+1} d\mu = \tfrac{2}{3}\cdot 2\,.$$

Durch Multiplication der Schaar ergiebt sich:

$$\int_{-1}^{+1}(1-\mu^2)^{\mathfrak{f}}\, d\mu = 2\cdot\frac{2\cdot 4\,\ldots\,(2\,\mathfrak{f}-2)\cdot 2\,\mathfrak{f}}{3\cdot 5\,\ldots\,(2\,\mathfrak{f}-1)\cdot(2\,\mathfrak{f}+1)}\,.$$

Dazu tritt nun der Factor:

$$P^{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{k}} = [1\cdot 3 \ldots (2\mathfrak{k} - 1)]^2.$$

Die ungeradzahligen Nennerfactoren heben sich also mit Ausnahme des letzten fort. Es bleibt im Nenner nur $(2\mathfrak{k} + 1)$ stehen. Im Zähler ist die erste Potenz der ungeraden Zahlen bis $(2\mathfrak{k} - 1)$ übrig geblieben. Dazu gesellt sich aber das Product der geraden Zahlen bis $2\mathfrak{k}$, so daſs der Zähler das Product aller Zahlen $1\cdot 2\cdot 3 \ldots (2\mathfrak{k} - 1)\cdot 2\mathfrak{k}$ enthält. Schlieſslich ist noch ein einzelner Factor 2 vorhanden. Es ist mithin:

$$\int_{-1}^{+1} P^{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{k}}(1-\mu^2)^{\mathfrak{k}}\, d\mu = \frac{2}{2\mathfrak{k}+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (2\mathfrak{k}-1)\cdot 2\mathfrak{k}.$$

Dies haben wir nun in (156a) einzusetzen. Dort steht im Nenner ebenfalls eine Zahlenreihe, beginnend mit $1\cdot\ 2\cdot\ 3\cdot$ und schlieſsend mit $(2\mathfrak{k} - 1)\cdot 2\mathfrak{k}$, aber sie hat in der Mitte eine Lücke. Es fehlen ihr die Factoren

$$(\mathfrak{k} - \mathfrak{i} + 1)\cdot(\mathfrak{k} - \mathfrak{i} + 2) \ldots (\mathfrak{k} + \mathfrak{i} - 1)\cdot(\mathfrak{k} + \mathfrak{i}).$$

Während sich also die vorhandenen Factoren gegen die entsprechenden der vollständigen Zahlenfolge im Zähler heben, bleiben die Zahlen der Lücke im Zähler ungehoben stehen, so daſs wir die Schluſsformel finden:

$$\int_{-1}^{+1} P^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{k}}\cdot(1-\mu^2)^{\mathfrak{i}}\, d\mu = \frac{2}{2\mathfrak{k}+1}\cdot(\mathfrak{k} - \mathfrak{i} + 1)(\mathfrak{k} - \mathfrak{i} + 2)\ldots(\mathfrak{k}+\mathfrak{i}). \quad (156\text{b})$$

Für $\mathfrak{i} = 0$ versagt diese Schreibweise. Nämlich für diesen Fall zeigt die Zahlenreihe im Nenner von (156a) gar keine Lücke, es folgt vielmehr auf $(\mathfrak{k} - \mathfrak{i}) = \mathfrak{k}$ unmittelbar $(\mathfrak{k} + \mathfrak{i} + 1) = \mathfrak{k} + 1$. Deſshalb hat dann obige Schreibweise der Lückenzahlen keinen Sinn, vielmehr hebt sich dann: $\frac{(2\mathfrak{k})!}{(2\mathfrak{k})!} = 1$ und es ist

$$\int_{-1}^{+1} P_{\mathfrak{k},0}\, d\mu = \frac{2}{2\mathfrak{k}+1}\cdot \quad (156\text{c})$$

Für $\mathfrak{i} = 1$ bestehen bereits zwei Lückenzahlen $\mathfrak{k}\cdot(\mathfrak{k} + 1)$, welche auch in (156b) richtig auftreten.

Wir können nun zu unserer Hauptaufgabe schreiten, den Coefficienten $A_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}$ auszudrücken. Wegen der Besonderheiten, welche der Fall $\mathfrak{i} = 0$ in zwei Hinsichten aufwies, wollen wir diesen zunächst ausnehmen. Die Formel (156) unter Benützung von (156b) liefert jetzt:

$$L = \frac{2\pi}{2\mathfrak{k}+1}(\mathfrak{k}-\mathfrak{i}+1)(\mathfrak{k}-\mathfrak{i}+2)\ldots(\mathfrak{k}+\mathfrak{i})\cdot A_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}.$$

Isoliren wir $A_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}$ und setzen für L wieder den ausführlichen Ausdruck ein, welcher die linke Seite der Gleichung (151) bildet, so erhalten wir das Resultat:

$$\underset{\mathfrak{i}>0}{A_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}} = \frac{2\mathfrak{k}+1}{2\pi\cdot(\mathfrak{k}-\mathfrak{i}+1)(\mathfrak{k}-\mathfrak{i}+2)\ldots(\mathfrak{k}+\mathfrak{i})}\int\limits_{-1}^{+1} d\mu \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, f(\mu,\eta)\, P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}} \cos\mathfrak{i}\eta. \quad (157)$$

Für den Fall $\mathfrak{i} = 0$ folgt unter Beachtung der Besonderheiten (4π statt 2π und Fehlen der Lückenzahlen)

$$A_{\mathfrak{k},0} = \frac{2\mathfrak{k}+1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{+1} d\mu \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, f(\mu,\eta)\, P_{\mathfrak{k},0}. \quad (157\text{a})$$

Besonders zu erwähnen ist noch das Anfangsglied:

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{+1} d\mu \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, f(\mu,\eta), \quad (157\text{b})$$

welches übrigens in richtiger Form aus $A_{\mathfrak{k}0}$ folgt, da $P_{00} = 1$ gesetzt ist. Da 4π die Oberfläche der Einheitskugel mifst, sieht man, dafs dieses A_{00} nichts Anderes ist, als der Mittelwerth der willkürlichen Function $f(\mu,\eta)$.

Die Berechnung der anderen Coefficientenschaar $B_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$ geschieht in ganz analoger Weise. Suchen wir ein bestimmtes $B_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}$, so erweitern wir die Gleichung (150) mit

$$P_{\mathfrak{k}\mathfrak{i}}\cdot\sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}}\cdot\sin\mathfrak{i}\eta$$

und verfahren genau so weiter, wie vorher.

An Stelle der Gleichung (152) tritt jetzt

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\,(A_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}\sin\mathfrak{i}\eta\cos\mathfrak{i}\eta + B_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}\sin^2\mathfrak{i}\eta) = \pi B_{\mathfrak{n}\mathfrak{i}}.$$

Um den (152a) entsprechenden Sonderfall $\mathfrak{i} = 0$ haben wir uns hier nicht zu bekümmern, da Glieder mit den Coefficienten $B_{\mathfrak{n}0}$ nicht vorkommen.

Das Resultat, entsprechend (157) wird

$$B_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} = \frac{2\mathfrak{l}+1}{2\pi(\mathfrak{l}-\mathfrak{i}+1)(\mathfrak{l}-\mathfrak{i}+2)\ldots(\mathfrak{l}+\mathfrak{i})}\int\limits_{-1}^{+1} d\mu \int\limits_{0}^{2\pi} d\eta\, f(\mu,\eta)\, P_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{i}} \sin \mathfrak{i}\eta. \quad (158)$$

§ 43. Einfaches Beispiel für die Darstellung einer Function von μ durch eine Kugelfunctionen-Reihe.

Um die Brauchbarkeit der vorstehenden Formeln für die Berechnung der Coefficienten einer Kugelfunctionen-Reihe zu zeigen, wählen wir ein einfaches Beispiel, welches zugleich noch in anderer Hinsicht von Wichtigkeit ist. Wir legen um den Nullpunkt eine Kugelfläche vom Radius R_1 und bestimmen auf der Polaraxe im Abstand R_2 einen festen Punkt. Wir wollen dabei, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, $R_2 > R_1$ annehmen, so dafs der feste Punkt aufserhalb der Kugel liegt. Die Entfernung ϱ dieses Punktes von den verschiedenen Stellen der Kugelfläche ist dann unabhängig von deren Längenwinkel η, alle Orte, die auf dem gleichen Parallelkreise liegen, besitzen gleiche Entfernung von jenem auf der verlängerten Polaraxe festgelegten Punkte. Von der Poldistanz ϑ hängt diese Entfernung aber ab nach der bekannten Formel

$$\varrho = \sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2 R_2 R_1 \cos\vartheta},$$

in welcher R_1 und R_2 als Constanten, und $\cos\vartheta = \mu$ als Variabele erscheint.

Wir stellen uns nun die Aufgabe den reciproken Werth dieses Abstandes durch eine Kugelfunctionen-Reihe auszudrücken. Zu dem Zwecke haben wir in die Schlufsformeln (157, a, b) und (158) einzufügen:

$$f(\mu,\eta) = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2 R_2 R_1 \mu}}. \quad (159)$$

Wegen der Unabhängigkeit unserer Function von η werden alle Coefficienten $A_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}$ und $B_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}$ für $\mathfrak{i} > 0$ verschwindend, denn in den Formeln (157) und (158) bleibt von der Integration über den Längenwinkel nur übrig

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos \mathfrak{i}\eta\, d\eta = \int\limits_0^{2\pi} \sin \mathfrak{i}\eta\, d\eta = 0.$$

Wir brauchen daher nur die Reihe der Coefficienten $A_{\mathfrak{k},0}$ zu berechnen; die Formel (157a) vereinfacht sich, indem $\int_0^{2\pi} d\eta = 2\pi$ ist, und lautet:

$$A_{\mathfrak{k},0} = \frac{2\mathfrak{k}+1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{P_{\mathfrak{k},0}}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2 R_1 \mu}}. \qquad (159\text{a})$$

Da $P_{\mathfrak{k},0}$ bekannte ganze Functionen von μ sind [(vgl. Gleichung (147)], so kann man hiernach die Coefficienten der Reihe nach ausrechnen. Man wird auf Integraltypen von folgender Form geführt:

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^a}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2 R_1 \mu}}.$$

Für diese kann man durch partielle Integration eine Reductionsformel für sinkendes a aufstellen. Dabei erst wird es von Wichtigkeit, dafs wir $R_2 > R_1$ vorausgesetzt haben. Während nämlich die bisherigen Ausdrücke durchaus symmetrisch nach R_1 und R_2 gebaut sind, werden diese Integrale unsymmetrisch.

Wir wollen hier nur die Ausrechnung der niedrigsten Glieder der Reihe andeuten. Die niedrigsten Vertreter der $P_{\mathfrak{k}0}$ findet man in den Gleichungen (147a), die in Frage kommenden Integrale lauten, wenn man als Abkürzung der Quadratwurzel das Zeichen ϱ setzt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\varrho} = \frac{2}{R_2}, \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\mu\, d\mu}{\varrho} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2^2},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu^2 d\mu}{\varrho} = \frac{2}{3}\frac{1}{R_2} + \frac{4}{15}\frac{R_1^2}{R_2^3}, \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{\mu^3 d\mu}{\varrho} = \frac{2}{5}\frac{R_1}{R_2^2} + \frac{4}{35}\frac{R_1^3}{R_2^4}, \quad \text{etc.}$$

Danach ist beispielsweise:

$$A_{3,0} = \frac{7}{2}\int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\frac{5}{2}\mu^3 - \frac{3}{2}\mu}{\varrho} = \frac{35}{4}\int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^3}{\varrho} - \frac{21}{4}\int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu}{\varrho}$$

$$= \frac{35}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\frac{R_1}{R_2^2} + \frac{4}{35}\frac{R_1^3}{R_2^4}\right) - \frac{21}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2^2}\right) = 1\cdot\frac{R_1^3}{R_2^4}.$$

Ebenso leicht wird man sich überzeugen, dafs

$$A_{0,0} = \frac{1}{R_2}$$

$$A_{1,0} = \frac{R_1}{R_2^2}$$

$$A_{2,0} = \frac{R_1^3}{R_2^2}$$

und wenn auch das Bildungsgesetz des allgemeinen Coefficienten hier nicht streng abgeleitet ist, kann man es durch Analogieschlufs errathen:

$$A_{l,0} = \frac{R_1^l}{R_2^{l+1}}.$$

Die Kugelfunctionen-Reihe, d. h. so viel wie in unserem einfachen Falle von der Formel (150) übrig bleibt, lautet hiernach:

$$\frac{1}{\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_1^n}{R_2^{n+1}} \cdot P_{n,0} \quad \text{für} \quad R_2 > R_1. \tag{159b}$$

Wenn wir mit dem gröfseren R_2 erweitern, und die Zeichen ϱ und $\sum$ durch die ausführliche Schreibart ersetzen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2 R_1 \mu}} &= P_{0,0} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^1 P_{1,0} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 P_{2,0} \\ &\quad + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 P_{3,0} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{159c}$$

Nun können wir auch gleich die entgegengesetzte Annahme, dafs nämlich der feste Punkt auf der Polaraxe innerhalb der Kugelfläche liegt, verfolgen. Wir brauchen dann den festen Abstand auf der Polaraxe nur R_1 und den Kugelradius R_2 zu nennen; dann ist wieder $R_1 < R_2$ und sämmtliche vorstehende Formeln bleiben ungeändert in Gültigkeit, nur haben R_1 und R_2 ihre geometrische Bedeutung für das Problem vertauscht. Den singulären Fall $R_1 = R_2$ wollen wir vorsichtshalber ausschliefsen, da dann die zu entwickelnde Function (159) im Pole für $\mu = 1$ unendlich wird, und die Convergenz der unendlichen Reihe mindestens zweifelhaft erscheint. Es ist indessen nicht ausgeschlossen, dafs sie auch dann noch für echtgebrochenes μ zulässig ist.

Dieses Resultat (159c) ist nicht nur als eine Coefficientenberechnung der Kugelfunctionen-Reihe mit höchst einfach geformtem Ergebniſs interessant, sondern auch dadurch, daſs man die linke Seite, unabhängig vom vorigen, durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes direct in eine Potenzreihe des echten Bruches $\frac{R_1}{R_2}$ entwickeln kann. Diese Entwickelung muſs dann mit unserem Resultat (159c) identisch sein, da dieses, wie sich zeigt, ebenfalls als Potenzreihe von $\frac{R_1}{R_2}$ erscheint. Bei unserer Herleitung muſsten die $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^a$ als Coefficienten der Kugelfunctionen-Reihe erst aufgefunden werden, während die $P_{a,0}$ uns bekannte Normalfunctionen waren. Bei der Entwickelung in eine Potenzreihe hingegen sind die $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^a$ die bekannten Normalfunctionen, während die zugehörigen Coefficienten, welche mit unseren $P_{a,0}$ identisch sein müssen, erst gefunden werden müssen.

Diese doppelte Bedeutung der Entwickelung (159c) ist für uns wichtig. Wir haben nämlich die Kugelfunctionenreihe aufgestellt, ohne uns streng mathematisch von ihrer Convergenz zu überzeugen. Wir konnten nur sagen: Unter der Voraussetzung, daſs solche Reihen möglich sind, müssen ihre Coefficienten die Form (157) und (158) haben. Von der Potenzreihe des Binominalsatzes ist aber wohlbekannt, daſs sie convergirt, so lange $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ ein echter Bruch ist. Ferner sieht man, daſs die Reihenentwickelung (159c), als Potenzreihe aufgefaſst, zu einer vom Früheren unabhängigen Definition der Kugelfunctionen $P_{n,0}$ führt, und zwar zu einer solchen, bei welcher nicht erst unbestimmte Factoren geeignet festzusetzen sind, sondern welche sogleich eindeutige Zahlenwerthe liefert.

Dieser Weg ist zuerst von LAPLACE eingeschlagen worden. Wegen der Bedeutsamkeit der merkwürdigen Beziehung wollen wir diese Potenzreihenentwickelung hier ebenfalls noch ausführen. Man kommt am leichtesten zum Ziele, wenn man mit imaginären Exponentialfunctionen rechnet

$$\mu = \cos\vartheta = \tfrac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}).$$

Dann zerfällt der Radicandus ϱ^2 in zwei lineare, conjugirt complexe Factoren:

$$R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1\mu = (R_2 - R_1e^{i\vartheta})(R_2 - R_1e^{-i\vartheta}).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung für den echten Bruch

$$\frac{R_1}{R_2} = \alpha,$$

so wird die linke Seite von (159a):

$$\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1^2 - 2R_2R_1\mu}} = (1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}}.$$

Der binomische Satz liefert:

$$(1 - \alpha e^{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{i\vartheta} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 e^{2i\vartheta} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3 e^{3i\vartheta} + \dots$$

$$(1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{-i\vartheta} + \frac{1\cdot 3}{2.4}\alpha^2 e^{-2i\vartheta} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\alpha^3\cdot e^{-3i\vartheta} + \dots$$

Beide unendlichen Reihen convergiren absolut, da der Modul der complexen Zahlen $\alpha e^{\pm i\vartheta} < 1$ ist. Darum kann man das Product der linken Seiten durch gliedweise Multiplication der rechten Seiten finden, wie folgt:

$$\begin{aligned}
&(1 - \alpha e_{i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 - \alpha e^{-i\vartheta})^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left[\alpha(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + \frac{1}{2}\alpha^2\right] \\
&\quad + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left[\alpha^2(e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta}) + \frac{1}{2}\cdot\alpha^3(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^4\right] \\
&\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left[\alpha^3(e^{3i\vartheta} + e^{-3i\vartheta}) + \frac{1}{2}\alpha^4(e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta})\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^5(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^6\right] \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

Die imaginären Exponentialgrößen vereinigen sich durchweg zu den reellen Werthen der zweifachen Cosinus der Vielfachen von ϑ.

Ordnen wir nach Potenzen von α und bezeichnen zur Abkürzung die auftretenden Zahlenfactoren durch Symbole von der Form:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} = \left[\cdot\frac{5}{6}\right],$$

so kommt:

$$
\begin{aligned}
(1 - 2\alpha\mu + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 & \\
& + \alpha \cdot 2\,[\cdot \tfrac{1}{2}] \cos\vartheta \\
& + \alpha^2 \cdot 2\,\{[\cdot \tfrac{3}{4}] \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\,[\cdot \tfrac{1}{2}]^2\} \\
& + \alpha^3 \cdot 2\,\{[\cdot \tfrac{5}{6}] \cos 3\vartheta + [\cdot \tfrac{1}{2}]\,[\cdot \tfrac{3}{4}] \cos\vartheta\} \\
& + \alpha^4 \cdot 2\,\{[\cdot \tfrac{7}{8}] \cos 4\vartheta + [\cdot \tfrac{1}{2}]\,[\cdot \tfrac{5}{6}] \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\,[\cdot \tfrac{3}{4}]^2\} \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

Allgemeines Glied:

$$
\begin{aligned}
+ \alpha^n \cdot 2 \Big\{ \Big[\cdot \frac{2n-1}{2n}\Big] \cos n\vartheta + \Big[\cdot \frac{1}{2}\Big]\Big[\cdot \frac{2n-3}{2n-2}\Big] \cos(n-2)\vartheta & \\
+ \Big[\cdot \frac{3}{4}\Big]\Big[\cdot \frac{2n-5}{2n-4}\Big] \cos(n-4)\vartheta + \ldots \Big\}. &
\end{aligned}
$$

Dieses Polynom ist für ungerades n fortzusetzen, bis das Glied mit $\cos\vartheta$ (einfacher Winkel) erreicht ist. Für gerades n schliefst der Ausdruck mit dem von ϑ unabhängigen reinen Zahlengliede

$$
\frac{1}{2}\Big[\cdot \frac{n-1}{n}\Big]^2
$$

ab, welchem der besondere Factor $\frac{1}{2}$ zugesetzt werden mufs, weil der aus dem Polynom herausgezogene Factor, herrührend von den zweifachen Cosinus, diesem Gliede fehlt.

Damit haben wir die Potenzreihenentwickelung vollendet und zugleich eine neue Darstellung der Kugelfunction $P_{n\,0}$ gefunden, denn nach (159b) ist diese gleich dem Coefficienten von $\alpha^n = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n$.

Man pflegt noch den Factor $\left[\cdot \frac{2n-1}{2n}\right]$ vor die Klammer zu setzen, so dafs sich, nach leicht übersehbarer Hebung gemeinsamer Zahlen in den Zählern und Nennern das Resultat ergiebt:

$$
\left.
\begin{aligned}
P_{n,\,0} = 2 \cdot \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots 2n} \cdot \Big\{ \cos n\vartheta + \frac{1\cdot n}{1\cdot(2n-1)} \cos(n-2)\vartheta & \\
+ \frac{1\cdot 3\cdot n(n-1)}{1\cdot 2\cdot(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\vartheta + \ldots \Big\}. &
\end{aligned}
\right\} \quad (160)
$$

Hierbei ist vorstehende Bemerkung über das Abbrechen des Polynoms und für gerades n auch der Zusatz des Factors $\frac{1}{2}$ zum letzten Gliede zu beachten.

Wollte man diese Formel (160) zur Deckung mit (147) bringen, so müfste man die Cosinus der Vielfachen von ϑ durch Potenzen von $\cos\vartheta$ ausdrücken. Die Umrechnung ist indessen recht verwickelt. Dafs beide Formeln thatsächlich nur zwei formell verschiedene Ausdrücke für die nämlichen Functionen sind, ist wegen der Reihe (159c) nicht zweifelhaft.

§ 44. Anwendung der Kugelfunctionen auf elektrostatische Probleme.

Nachdem wir im Vorangegangenen die wichtigsten mathematischen Eigenschaften der Kugelfunctionen dargelegt haben, wollen wir nun deren Anwendungen auf einige elektrostatische Probleme betrachten. Die erste Fundamentalaufgabe ist folgende:

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R ist eine bestimmte Vertheilung von Elektricität festgelegt. Das Potential des Feldes, welches von dieser Vertheilung herrührt, soll gefunden werden. Wir können die Flächendichtigkeit e als eine willkürlich vorgeschriebene (eindeutige, endliche, stetige) Function durch die Variabelen $\mu (= \cos\vartheta)$ und η eines in den Mittelpunkt der Kugel gelegten Polarcoordinatensystems dargestellt denken. Man kann dann das Potential nach der altbekannten Formel:

$$\varphi = \iint \frac{e\,ds}{\varrho}$$

finden, wo ds Flächenelement der geladenen Kugeloberfläche, ϱ der Abstand dieses Flächenelementes von dem Raumpunkt ist, in welchem φ bestimmt wird. Wir wollen hier einen ganz anderen Weg einschlagen. Wir entwickeln zunächst e in einer Kugelfunctionenreihe

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \cdot e_{nm} \cdot \cos(m\eta - c_{nm}). \tag{161}$$

Die Coefficienten sind mit e_{nm} bezeichnet, weil sie ihrer Dimension nach Flächendichtigkeiten sind. Die Phase $c_{00} = 0$.

Das Potential bleibt, wie wir füher ausführlich nachgewiesen haben, an Stellen, wo endliche Flächendichten liegen, endlich bestimmt und auch stetig. Daher bilden die Werthe $\overline{\varphi}$, welche das Potential auf der Kugeloberfläche selbst annimmt, ebenfalls eine (endliche, eindeutige, stetige) Function von μ und η, deren Anord-

nung durch die Vertheilung von ϵ bedingt wird, wenn wir auch noch nicht wissen, in welcher Weise. Jedenfalls können wir uns auch diese Function $\overline{\varphi}$ durch eine Kugelfunctionenreihe ausgedrückt denken:

$$\overline{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \cdot \overline{\varphi}_{nm} \cdot \cos(m\eta - c'_{nm}). \qquad (162)$$

Die Coefficienten $\overline{\varphi}_{nm}$ sind von der Dimension des Potentials. Die Phasenconstanten c'_{nm} müssen zunächst als verschieden von denjenigen in (161) angenommen werden, jedoch ist auch $c'_{00} = 0$.

Wir haben jetzt die Aufgabe, die auf der Kugelfläche durch (162) dargestellte Function φ so in das Innere der Kugel und in den äußeren Raum fortzusetzen, daß der Anschluß an $\overline{\varphi}$ ein stetiger ist, d. h., daß φ selbst beim Durchgang durch die Kugelfläche stetig bleibt, daß ferner φ überall innen und außen der LAPLACE'schen Gleichung gehorcht, daß φ im Nullpunkt endlich und stetig bleibt und in sehr großen Abständen r gegen Null schwindet, mindestens wie $\frac{1}{r}$. Haben wir eine innere und äußere Fortsetzung gefunden, welche allen diesen Bedingungen genügt, so muß diese das gesuchte Potential sein, denn es giebt nur eine einzige solche Function. Hierbei kommt uns eine zweite Eigenschaft der Kugelfunctionen zu Statten, während wir bis jetzt erst die eine (die Darstellung willkürlicher Functionen auf der Kugelfläche durch Kugelfunctionenreihen) verwendet haben. Wir haben nämlich bereits in § 38, noch vor Aufstellung der Normalformen, bewiesen, daß jede Kugelfunction $n$ten Grades sowohl durch Multiplication mit r^n, als auch durch Multiplication mit $\frac{1}{r^{n+1}}$ eine Raumfunction liefert, welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt. Die erste Klasse dieser Functionen bleibt im Nullpunkt endlich, wird sogar, mit Ausnahme des Falles $n = 0$, daselbst gleich Null, sie wachsen aber in großer Entfernung über alle Grenzen. Es sind dies ganze Functionen der cartesischen Coordinaten. Die zweite Klasse hat im Nullpunkt eine Unendlichkeitsstelle, schwindet aber in großer Entfernung gegen Null mindestens wie $\frac{1}{r}$.

Wir setzen deßhalb das Potential im Inneren der Kugel in der Form an

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{r^n}{R^n} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m}\, \overline{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}), \qquad (162\text{a})$$

im Aufsenraum

$$\varphi_a = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \,\overline{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}). \quad (162\,b)$$

Diese Ausdrücke gehen für $r = R$ in stetiger Weise in die für $\overline{\varphi}$ aufgestellte Kugelfunctionenreihe (162) über, sie genügen auch beide der LAPLACE'schen Differentialgleichung.

Im Mittelpunkt erhalten wir den endlichen Betrag

$$\varphi_{i \atop r=0} = \overline{\varphi}_{00}$$

und in endlicher Entfernung schwindet φ_a mindestens wie

$$\varphi_\infty = \frac{R}{r} \overline{\varphi}_{00} .$$

Falls der Coefficient $\overline{\varphi}_{00} = 0$ ist, schwindet sogar φ_∞ wie eine höhere negative Potenz von r. Wir haben also eine richtige Darstellung für das Potential der Kugelbelegung gefunden, freilich zunächst von unbekanntem Werthe, da wir die Abhängigkeit der Coefficienten $\overline{\varphi}_{nm}$ und c'_{nm} von der Vertheilung e, also von den Coefficienten e_{nm} und c_{nm} noch nicht kennen.

Zu dieser Kenntnifs verhilft uns nun der Satz, dafs der nach der Normale auf der belegten Fläche genommene Differentialquotient des Potentials beim Durchgang durch diese Fläche einen Sprung erleidet, dessen Betrag gleich $-4\pi e$ ist. Nehmen wir die Normale auf der Kugelfläche in Richtung der wachsenden r. Es ist:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} n \frac{r^{n-1}}{R^n} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \,\overline{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm})$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} -(n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \,\overline{\varphi}_{nm} \cos(m\eta - c'_{nm}).$$

Setzen wir in diesen beiden Ausdrücken $r = R$, so erhalten alle Glieder den Factor $\frac{1}{R}$ und es ist

$$-4\pi e = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_{r=R} .$$

Fafst man beide Doppelsummen zusammen und dividirt durch -4π, so erhält man

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{nm} \sqrt{1-\mu^2}^{\,m} \cdot \left[\frac{2n+1}{4\pi R} \overline{\varphi}_{nm}\right] \cdot \cos(m\eta - c'_{nm}).$$

Dies ist eine Kugelfunctionenreihe für e, welche wegen der Eindeutigkeit dieser Entwickelung identisch sein mufs mit der Anfangs gebildeten Reihe (161). Die Vergleichung der Coefficienten liefert uns folgende einfache Relationen:

$$c'_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} = c_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}$$

und

$$e_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} = \frac{2\mathfrak{n}+1}{4\pi R}\bar{\varphi}_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}, \tag{163}$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\bar{\varphi}_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}} = \frac{4\pi R}{2\mathfrak{n}+1} e_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}. \tag{163 a}$$

So kann man zu einer vorgeschriebenen Flächenbelegung der Kugel leicht das Potential finden, und auch umgekehrt, wenn die Werthvertheilung von $\bar{\varphi}$ auf der Kugelfläche vorgeschrieben ist, diejenige Elektricitätsbelegung berechnen, welche ihr entspricht, zugleich liefern dann (162a) und (162b) die richtigen, der LAPLACE-Gleichung genügenden stetigen Fortsetzungen des Potentials durch den inneren und äufseren Raum.

Eine besondere Bedeutung hat der erste Coefficient e_{00}. Er mifst den Mittelwerth der Dichtigkeit über die ganze Kugelfläche, mithin ist

$$\mathfrak{e} = 4\pi R^2 \cdot e_{00}$$

die Gesammtladung der Kugel. Der entsprechende erste Coefficient $\bar{\varphi}_{00}$ ist dann nach (163 a)

$$\bar{\varphi}_{00} = \frac{\mathfrak{e}}{R}$$

und der erste Summand der Reihen für φ wird

$$\text{innen} \quad = \frac{\mathfrak{e}}{R}$$

$$\text{aufsen} \quad = \frac{\mathfrak{e}}{r},$$

stellt also das Potential der gleichförmig über die ganze Kugelfläche verbreiteten Ladung $\mathfrak{e}$ dar. In grofser Entfernung r bleibt er am längsten spürbar, während die höheren Glieder schon in verhältnifsmäfsig geringeren Abständen der Reihe nach unmerklich werden. Besitzt die Kugel keine überschüssige Ladung, sondern nur

durch Influenz getrennte Belegung, deren algebraische Summe ja gleich Null sein mufs, so fehlt dieses Anfangsglied sowohl in der e-Reihe, wie auch in den $\overline{\varphi}$-, φ_i- und φ_a-Reihen.

Man kann also wegen der ungestörten Superposition der Wirkungen die überschüssige Ladung der Kugel auch hier leicht abtrennen von dem durch Influenz in positive und negative Quanta zerlegten Antheile des unerschöpflichen neutralen Vorraths.

Besonders einfach gestaltet sich die behandelte Aufgabe, wenn die Belegung e durch ein einziges Glied der Reihe dargestellt wird, weil dann auch das Potential durch ein einziges entsprechendes Glied der Reihen (162a) und (162b) gegeben wird.

§ 45. Die transcendenten Integrale der Differentialgleichung der Kugelfunctionen.

Man kann den Ansatz Gleichung (136) zu Anfang des § 41, unabhängig von der damals aus den voraufgegangenen Betrachtungen übernommenen Bedeutung der Function $P_{n,m}(\mu)$, hinstellen als die von sonstigen Rücksichten unabhängige Forderung, es solle eine Potentialfunction φ gefunden werden, welche, ausgedrückt in den räumlichen Polarcoordinaten r, μ und η, von der dort gegebenen Gestalt ist und welche der LAPLACE'schen Differentialgleichung genügt. Das Ergebnifs war, dafs diese Forderung erfüllt ist, sobald man für $P_{n\,m}$ irgend eine Function von μ einsetzt, wenn diese nur der Differentialgleichung (137) genügt. Weiter zeigte sich, dafs jedes solche $P_{n\,m}$ der $m$te Differentialquotient einer Function $P_{n,0}$ ist, welch' letztere der Differentialgleichung (139) genügen mufs. Mit der Auffindung von Integralen dieser Differentialgleichung (139) sind also die Schlüssel zur Bildung von Potentialfunctionen des Typus (136) gewonnen.

Bisher haben wir nur die eine Hälfte der gewonnenen Ausbeute verwendet. Wir fanden nämlich, dafs aufser der gewöhnlichen Kugelfunction $P_{n,0}$, welche eine ganze Function $n$ten Grades von μ ist, noch eine andere Art von Integralen existirt, welche sich in Form der unendlichen Potenzreihen (143) oder (144) darstellen läfst.

Diese sogenannten „Kugelfunctionen zweiter Art", $Q_{n,0}$, wollen wir jetzt näher betrachten und zur Bildung von Potentialen benutzen.

Den Coefficienten des ersten Gliedes dieser Reihen können wir

willkürlich bestimmen; alle folgenden ergeben sich dann mit Hülfe der procurrenten Formel (141), welche lautete:

$$A_{\mathfrak{a}+2} = \frac{(\mathfrak{a} - \mathfrak{n})(\mathfrak{n} + \mathfrak{a} + 1)}{(\mathfrak{a} + 1)(\mathfrak{a} + 2)} A_{\mathfrak{a}}.$$

Man erhält folgende Reihen. Für gerades $\mathfrak{n}$:

$$Q_{\mathfrak{n},0} = A_1 \cdot \left\{\mu + \frac{(1-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+2)}{2 \cdot 3}\mu^3 + \frac{(1-\mathfrak{n})(3-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+2)(\mathfrak{n}+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\mu^5 + \frac{(1-\mathfrak{n})(3-\mathfrak{n})(5-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+2)(\mathfrak{n}+4)(\mathfrak{n}+6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}\mu^7 + \dots\right\} \quad (164)$$

Für ungerades $\mathfrak{n}$:

$$Q_{\mathfrak{n},0} = A_0 \cdot \left\{1 + \frac{(0-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+1)}{1 \cdot 2}\mu^2 + \frac{(0-\mathfrak{n})(2-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\mu^4 + \frac{(0-\mathfrak{n})(2-\mathfrak{n})(4-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}+3)(\mathfrak{n}+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\mu^6 + \dots\right\} \quad (165)$$

Die nothwendig aufzuwerfende Frage nach der Convergenz dieser Reihen wird erledigt durch Gauss' Betrachtungen über die hypergeometrische Reihe. Er definirt eine Function F der Variabelen x mit drei Parametern α, β, γ durch die Reihe:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \quad \gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$$

In diesem Schema stecken, je nach den Werthen von α, β, γ und je nach etwaiger Substitution einer anderen Variabelen für x, sehr viele verschiedene Functionsarten, darunter auch solche, welche man bereits in anderen analytischen Darstellungen kennt. Wenn α oder β eine negative ganze Zahl oder Null ist, bricht die Reihe ab, stellt also eine ganze rationale Function dar, in allen anderen Fällen aber läuft die Reihe ohne Ende weiter. Natürlich darf γ keine negative ganze Zahl oder Null sein. Gauss hat nun gezeigt, dafs seine Reihe immer convergirt, wenn $x^2 < 1$ ist, während sie für $x^2 > 1$ immer divergirt (wenn sie nicht abbricht). Für den Grenzfall $x^2 = 1$ ist die Convergenz an die Bedingung $\gamma > (\alpha + \beta)$ gebunden, ein über alle Grenzen grofser Werth ist für $x^2 = 1$ und

$\gamma = \alpha + \beta$ zu erwarten, und für $\gamma < (\alpha + \beta)$ ist dann die Reihe unbrauchbar, weil divergent.

Unsere Reihen (164) und (165) lassen sich nun leicht als hypergeometrische ausdrücken. Es ist nämlich für gerades $\mathfrak{n}$ inclusive 0:

$$Q_{\mathfrak{n},0} = A_1 \cdot \mu \cdot F\left(\frac{1-\mathfrak{n}}{2},\ \frac{\mathfrak{n}+2}{2},\ \frac{3}{2};\ \mu^2\right) \tag{164a}$$

und für ungerades $\mathfrak{n}$

$$Q_{\mathfrak{n},0} = A_0 \cdot F\left(\frac{0-\mathfrak{n}}{2},\ \frac{\mathfrak{n}+1}{2},\ \frac{1}{2};\ \mu^2\right). \tag{165a}$$

[Es sei bemerkt, daſs diese Darstellungen auch auf die Kugelfunctionen erster Art $P_{\mathfrak{n},0}$ anwendbar sind. Nur gilt dann (164a) für ungerades $\mathfrak{n}$ und (165a) für gerades $\mathfrak{n}$.]

So lange μ als Cosinus des Polarwinkels echt gebrochen ist, convergiren also unsere Reihen sicher. Für $\mu = \pm 1$, das heiſst für Punkte, welche auf der Polaraxe, der x-Axe unseres cartesischen Coordinatensystems, liegen, werden die dargestellten Werthe indessen unendlich, da in beiden Formeln der Specialfall $\gamma = \alpha + \beta$ vorliegt. Wir haben also auch zu erwarten, daſs die aus den $Q_{\mathfrak{n},0}$ abgeleiteten Potentialfunctionen in dieser Axe unendlich werden, was auf elektrische Belegung von endlicher Liniendichtigkeit schlieſsen läſst (vgl. § 13).

Bilden wir uns nun, um eine Anschauung zu bekommen, die ersten Vertreter dieser Kugelfunctionen zweiter Art, indem wir successive $\mathfrak{n} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ in die Reihen (164) resp. (165) einsetzen, so erhalten wir so übersichtliche Coefficientenfolgen, daſs eine Absonderung der bekannten Reihe

$$\mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \dots = \ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}$$

leicht ist. Die willkürlichen ersten Coefficienten wollen wir noch unbestimmt lassen und mit Const. bezeichnen. Dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} Q_{0,0} &= C\cdot\left(\mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \dots\right) \\ &= C\cdot \ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \end{aligned}\right\} \tag{166$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{1,0} &= C\cdot\left(1 - \frac{1}{1}\mu^2 - \frac{1}{3}\mu^4 - \frac{1}{5}\mu^6 - \frac{1}{7}\mu^8 - \dots\right) \\ &= C\cdot\left\{1 - \mu \ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{166$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{2,0} &= C\cdot\left(\mu - \frac{2}{1\cdot 3}\mu^3 - \frac{3}{3\cdot 5}\mu^5 - \frac{4}{5\cdot 7}\mu^7 - \dots\right) \\ &= C\cdot\left\{\frac{3}{4}\mu - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}\right)\ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (166_2)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{3,0} &= C\cdot\left(1 - 6\mu^2 + \frac{3\cdot 3}{1\cdot 3}\mu^4 + \frac{3\cdot 4}{3\cdot 5}\mu^6 + \frac{3\cdot 5}{5\cdot 7}\mu^8 + \dots\right) \\ &= C\cdot\left\{1 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}\right)\ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (166_3)$$

etc.

Man erkennt an diesen ersten Vertretern noch andere gesetzmäfsige Bildungen. Der Logarithmus erscheint in den einzelnen $Q_{n\,0}$ multiplicirt mit der entsprechenden ganzen Function $P_{n,0}$ [vgl. Gleichung (147 a)] und einem Zahlenfactor. Diesen letzteren können wir beseitigen, wenn wir der unbestimmten Constanten einen solchen Werth geben, dafs der Factor $= +1$ wird.

Wir machen also den Analogieschlufs aus obigen einfachen Beispielen, dafs allgemein gültig sein wird die Formel

$$Q_{n,0} = R_n + P_{n,0}\ln\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}, \qquad (166_n)$$

in welcher R_n eine ganze rationale Function $(n-1)$ten Grades von μ bedeutet, deren allgemeines Bildungsgesetz hier nicht aufzufinden ist, deren erste Vertreter indessen abgelesen werden können:

$$R_0 = 0\,, \quad R_1 = -1\,, \quad R_2 = -\frac{3}{2}\mu\,, \quad R_3 = -\frac{5}{2}\mu^2 + \frac{2}{3}\,.$$

Den allgemeinen Beweis für die Formel (166_n), sowie die Kenntnifs des Bildungsgesetzes der R_n verdanken wir Franz Neumann. Dieser hat zwar nicht unsere, für gebrochenes μ reellen $Q_{n,0}$-Functionen, sondern diejenigen Integrale zweiter Art der Differentialgleichung der Kugelfunctionen betrachtet, welche für $\mu = \pm 1$ unendlich werden, wie unsere, aber nun für $\mu^2 > 1$ reell sind und für $\mu = \pm\infty$ gegen Null schwinden. Diese konnten wir nicht auffinden, weil wir als Lösung in Gleichung (140) eine positive Potenzreihe angesetzt hatten. Würden wir statt dessen eine Reihe mit negativen Potenzen ansetzen, so würden wir eine ganz analoge procurrente Formel für die alternirenden Coefficienten finden,

somit für jede Zahl $\mathfrak{n}$ eine Lösung in Form einer unendlichen Reihe mit einem willkürlichen Factor. Diese Reihe convergirt dann für $\mu^2 > 1$ und giebt die von NEUMANN betrachteten $Q_{\mathfrak{n},0}$, welche sich mit den unsrigen in der Ausfüllung des Gebietes eines unbeschränkt variabelen μ gegenseitig ergänzen. Die ersten Vertreter dieser Functionen lauten:

$$\left.\begin{aligned} Q_{0,0}(\sigma) &= A_{-1}\left(\sigma^{-1} + \frac{1}{3}\sigma^{-3} + \frac{1}{5}\sigma^{-5}\right) \\ &= \text{Const.} \ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} \end{aligned}\right\} \tag{167_0}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{1,0}(\sigma) &= A_{-2}\left(\sigma^{-2} + \frac{3}{5}\sigma^{-4} + \frac{3}{7}\sigma^{-6} + \frac{3}{9}\sigma^{-8} + \dots\right) \\ &= \text{Const.}\left\{-1 + \sigma\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{167_1}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{2,0}(\sigma) &= A_{-3}\left(\sigma^{-3} + 3\cdot5\cdot\frac{2}{5\cdot7}\sigma^{-5} + 3\cdot5\cdot\frac{3}{7\cdot9}\sigma^{-7} + 3\cdot5\cdot\frac{4}{9\cdot11}\sigma^{-9} + \dots\right) \\ &= \text{Const.}\left\{-\frac{3}{2}\sigma + \left(\frac{3}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\right)\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{167_2}$$

etc. nach derselben Regel:

$$Q_{\mathfrak{n},0}(\sigma) = \text{Const.}\left\{R_{\mathfrak{n}} + P_{\mathfrak{n},0}\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}\right\}. \tag{$167_{\mathfrak{n}}$}$$

Die Variabele ist hier mit σ bezeichnet, um dem Buchstaben μ seine Bedeutung als Cosinus eines reellen Winkels zu wahren. Aus diesen Formeln kann man die Gestalt der $R_{\mathfrak{n}}$ für höhere $\mathfrak{n}$ leichter erkennen, als aus unseren Gleichungen (166). Denn wenn man hier $\sigma = \infty$ setzt, mufs $Q_{\mathfrak{n},0}(\sigma) = 0$ werden. Daraus folgt, dafs alle positiven Potenzen von σ fehlen müssen, was zur Bestimmung von $R_{\mathfrak{n}}$ hinreicht.

Diese Andeutungen mögen hier genügen. Weitere Aufschlüsse z. B. in HEINE's Handbuch der Kugelfunctionen, FRANZ NEUMANN Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen und Aufsatz in CRELLE's Journal Bd. 37 S. 21.

Wir wollen nun die Kugelfunctionen zweiter Art zur Bildung von Potentialen benützen, und uns dabei auf die für echt gebrochenes $\mu = \cos\vartheta = \frac{x}{r}$ gültigen beschränken. Aus $Q_{0,0}$, welches in (166_0)

gegeben ist, entstehen zwei im ganzen Raume, mit Ausnahme der x-Axe, gültige und der LAPLACE'schen Gleichung folgsame Potentiale:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}} \tag{168}$$

$$\varphi' = \frac{1}{r} \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\,. \tag{168 a}$$

Die elektrischen Felder, welche ihnen entsprechen, können herrühren von einer Belegung der beiden Hälften der x-Axe mit entgegengesetzten Elektricitäten vom Vorzeichen der zugehörigen Abmessungen x. Im ersten Falle (168) ist die Liniendichtigkeit auf jeder Hälfte bis in's Unendliche constant $= \pm \frac{1}{2}$. Im zweiten Falle (168 a) ist die Liniendichtigkeit $= \frac{1}{2x}$, nimmt also im Unendlichen gegen Null ab, wird aber in der Nähe des Anfangspunktes über alle Grenzen grofs. Im Anfangspunkte selbst stofsen in beiden Fällen entgegengesetzte Ladungen unvermittelt an einander. Die den Raum durchsetzenden Aequipotentialflächen sind im ersten Falle μ = constans, also Kegelflächen mit der Spitze im Nullpunkt, im zweiten Falle haben sie eine rübenähnliche Gestalt, das stumpfe Ende im Nullpunkt. Den aus den höheren $Q_{n,0}$ gebildeten Potentialen, z. B.

$$\varphi = r \cdot Q_{1,0} \quad \text{und} \quad \varphi' = \frac{1}{r^2} Q_{1,0}$$

etc., allgemein

$$\varphi = r^n Q_{n,0} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^{n+1}} Q_{n,0}$$

entsprechen immer complicirtere Belegungen der x-Axe, und wenn wir gar zu den hier gar nicht betrachteten, aber möglichen Functionen:

$$Q_{n,m} = \frac{d^m Q_{n,0}}{d\mu^m}$$

übergehen, und nach dem Schema der Gleichung (136) Potentiale daraus bilden, so wird die Mannigfaltigkeit noch gröfser. Indessen haben diese Fälle mehr ein mathematisches Interesse. Für die Elektrostatik sind sie defshalb weniger wichtig, weil alle Ladungen und Niveauflächen sich bis in's Unendliche erstrecken, also niemals etwa einen geladenen Conductor repräsentiren können.

§ 45 a. Einige Potentialfunctionen in elliptischen Coordinaten.

Wichtigere Resultate erhalten wir aus unseren neu gewonnenen Potentialfunctionen durch Anwendung einer Methode, welche auf folgender Ueberlegung beruht: Nehmen wir irgend eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung, welche als analytische Function der cartesischen Coordinaten ausgedrückt werden kann, also $\varphi(x, y, z)$, und setzen wir an die Stelle der einen Raumabmessung x die complexe Variabele $x + ia$, wo a eine constante Länge bedeutet, während x nachher wieder die gewöhnliche Coordinate bezeichnen soll, so kann man mit bekannten Rechenoperationen die complex gewordene Function φ in einen reellen und einen rein imaginären Theil zerlegen. Wir drücken dies in der Gleichung aus:

$$\varphi(x + ia, y, z) = \psi(x, y, z) + i\chi(x, y, z).$$

Die LAPLACE'sche Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ mufs dann auch, an der complexen Function ausgeführt, das Resultat Null geben, weil

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial (x + ia)} \cdot \frac{\partial (x + ia)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial (x + ia)}{\partial x} = 1$$

ist, und bei der zweiten Differentiation $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ dasselbe gilt. Wir erhalten also die Bedingung:

$$\Delta(\psi + i\chi) = \Delta\psi + i\Delta\chi = 0,$$

welche nur erfüllt sein kann, wenn

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\chi = 0$$

ist. Diese Methode lehrt uns also aus einer bekannten reellen Lösung φ der LAPLACE'schen Gleichung zwei neue reelle Lösungen ψ und χ herzuleiten, welche, wie wir sehen werden, von ihrer Mutter wesentlich verschieden sind.

Zur Anwendung wählen wir die einfachste der soeben gefundenen Potentialfunctionen (168). Wir können sie leicht in cartesischen Coordinaten ausdrücken, denn der Cosinus des Polarwinkels ist

$$\mu = \frac{x}{r}, \qquad \text{wobei} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Man erhält

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{r + x}{r - x}}.$$

Substituiren wir nun an Stelle von x die complexe Variabele $x + i a$, so müssen wir dies auch in dem Ausdruck r thun, welcher dadurch ebenfalls complex wird:

$$r' = \sqrt{(x + i a)^2 + y^2 + z^2} = a(\lambda + i \nu).$$

Den Zusammenhang der beiden reellen Zahlen λ und ν mit den reellen Abmessungen x, y, z findet man leicht, wenn man den Ausdruck r' quadrirt und die reellen und rein imaginären Theile einander gleichsetzt. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \lambda \nu \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 &= a^2(\lambda^2 - \nu^2). \end{aligned}\right\} \quad (169)$$

Die ausgeführte Substitution liefert die complexe Function:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{a(\lambda + i \nu) + x + i a}{a(\lambda + i \nu) - x - i a}}.$$

Setzt man hierin auf Grund der vorstehenden Relation (169) $x = a \lambda \nu$ und hebt den Factor a in Zähler und Nenner, so erhält man folgende durch leichte Umformungen aus einander entstehende Ausdrücke:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{\lambda + i\nu + \lambda\nu + i}{\lambda + i\nu - \lambda\nu - i}} = \ln \sqrt{\frac{(1+\nu)(\lambda + i)}{(1-\nu)(\lambda - i)}} = \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} + \ln \sqrt{\frac{\lambda + i}{\lambda - i}}.$$

Im letzten Gliede führen wir für die complexeren Zahlen $\lambda \pm i$ den Modul $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + 1}$ und das Azimuth $\alpha = \operatorname{arc\,cot} \lambda$ ein. Es ist dann

$$\lambda + i = \varrho \cdot e^{i\alpha}, \quad \lambda - i = \varrho \cdot e^{-i\alpha},$$

folglich

$$\sqrt{\frac{\lambda + i}{\lambda - i}} = e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad \ln \sqrt{\frac{\lambda + i}{\lambda - i}} = i\alpha,$$

so daſs das Resultat lautet:

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} + i \operatorname{arc\,cot} \lambda. \quad (170)$$

Man erkennt aus den beiden Relationen (169) leicht, daſs ν stets ein echter Bruch ist, während λ alle möglichen reellen Zahlenwerthe annehmen kann. Deſshalb liefert die Gleichung (170) stets die gewünschte Spaltung der complexen Function φ in einen reellen und einen rein imaginären Theil, und die beiden nach dieser Methode gewonnenen neuen Potentialfunctionen lauten:

$$\psi = \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \tag{170 a}$$

$$\chi = \operatorname{arc\,cot} \lambda. \tag{170 b}$$

Man könnte auf Grund der beiden Relationen (169) λ und ν durch x, y, z ausdrücken, es ist aber viel anschaulicher, λ und ν als Coordinaten beizubehalten und ihnen als dritte Abmessung den Längenwinkel η an die Seite zu stellen.

Man kann dann die cartesischen Coordinaten in Uebereinstimmung mit (169) folgendermaafsen durch λ, ν, η ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\lambda\nu \\ y &= a\sqrt{\lambda^2+1}\,\sqrt{1-\nu^2}\cos\eta \\ z &= a\sqrt{\lambda^2+1}\,\sqrt{1-\nu^2}\sin\eta \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

Um uns über die Bedeutung dieser Gleichungen zu informiren, eliminiren wir erstens ν und η, was durch Quadriren und Addiren der zweiten und dritten und Substitution von $\nu = \frac{x}{a\lambda}$ aus der ersten Gleichung bewirkt wird. Man erhält:

$$\frac{x^2}{a^2\lambda^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2(\lambda^2+1)} = 1.$$

Für jeden festen Werth λ^2 ist dies die Gleichung eines abgeplatteten Rotationsellipsoides. Lassen wir λ^2 alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen, so beginnt die Fläche als platte Kreisscheibe vom Radius a senkrecht zur x-Axe, wächst dann und wölbt sich, wird im Zunehmen immer kugelähnlicher und verschwindet als unendlich grofse Kugel.

Anderseits eliminiren wir aus den Gleichungen (171) λ und η und erhalten:

$$-\frac{x^2}{a^2\nu^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2(1-\nu^2)} = 1.$$

Dies ist für jeden festen echten Bruch ν^2 die Gleichung eines einschaligen Rotationshyperboloids. Lassen wir ν^2 alle Werthe von 0 bis 1 durchlaufen, so beginnt die Fläche, indem sie die (y, z)-Ebene mit Aussparung eines kreisförmigen Loches vom Radius a doppelt bedeckt, entfaltet sich dann höher und höher, während jenes Loch in der Grundebene immer enger wird. Schliefslich umhüllt die

Fläche, wie ein enger Schlauch die x-Axe, in welch' letztere die Fläche für $\nu^2 = 1$ degenerirt.

Eliminiren wir endlich λ und ν, so erhalten wir

$$\frac{z}{y} = \frac{\sin\eta}{\cos\eta}.$$

Das liefert für jedes feste η eine an der x-Axe ansetzende Meridianebene. Während η ein Intervall von der Gröfse 2π durchläuft, dreht sich diese Ebene einmal herum.

Jede der drei Flächenarten durchstreicht bei dem geschilderten Verlauf einmal den ganzen unendlichen Raum, trifft also einmal jeden irgend wo festgehaltenen Punkt x, y, z. Die drei Zahlenwerthe λ, ν, η, für welche dies zutrifft, nennen wir seine elliptischen Coordinaten. (Der Vollständigkeit halber müfste hinzugefügt werden: in demjenigen System, welches durch Rotation um die x-Axe entsteht, aus einem System confocaler Ellipsen und Hyperbeln in der xy-Ebene, deren Brennpunkt im Abstand a auf der y-Axe liegt. Um die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den cartesischen und den elliptischen Coordinaten eindeutig zu machen, kann man festsetzen:

$$0 \leqq \lambda \leqq \infty$$
$$-1 \leqq \nu \leqq +1$$
$$0 \leqq \eta \leqq 2\pi$$
$$\sqrt{\lambda^2+1} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-\nu^2} \quad \text{absolut.}$$

Es ist von Wichtigkeit ein beliebig im Raume gelegenes Längenelement dl auszudrücken durch die elliptischen Coordinaten seines Ortes und durch die Differentiale $d\lambda$, $d\nu$, $d\eta$, welche dem Unterschied seiner beiden Endpunkte entsprechen.

Zu dem Zwecke differenziren wir die Gleichungen (171)

$$dx = a\nu\, d\lambda + a\lambda\, d\nu$$

$$dy = a\lambda \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} \cos\eta\, d\lambda - a\nu \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{1-\nu^2}} \cos\eta\, d\nu - a\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{1-\nu^2} \sin\eta\, d\eta$$

$$dz = a\lambda \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} \sin\eta\, d\lambda - a\nu \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{1-\nu^2}} \sin\eta\, d\nu + a\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{1-\nu^2} \cos\eta\, d\eta$$

und bilden

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Die beim Quadriren der rechten Seiten auftretenden Doppelproducte heben sich beim Addiren sämmtlich fort und man erhält:

$$dl^2 = \left[a\frac{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}}d\lambda\right]^2 + \left[a\frac{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}{\sqrt{1-\nu^2}}d\nu\right]^2 + \left[a\sqrt{\lambda^2+1}\sqrt{1-\nu^2}\,d\eta\right]^2. \quad (171\text{a})$$

Aus dieser wichtigen Formel erkennt man, dafs die elliptischen Coordinaten orthogonal sind, d. h. dafs die drei Flächenschaaren sich überall senkrecht durchschneiden. Zwei eng benachbarte Ellipsoide λ und $(\lambda + d\lambda)$, zwei desgleichen Hyperboloide ν und $(\nu + d\nu)$ und zwei desgleichen Meridianebenen η und $(\eta + d\eta)$ schliefsen ein kleines rechteckiges Volumelement ein, dessen drei Kantenlängen (Normalabstände der Nachbarflächen) durch die einzelnen eckigen Klammern der Gleichung (171a) gegeben sind, während dl die Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds nach dem Pythagoräischen Lehrsatz ausdrückt. Als besonders wichtig für das Folgende lesen wir heraus, dafs die Normale auf der Ellipsoidfläche, welche dem Zuwachs $d\lambda$ entspricht, die Länge hat

$$n_\lambda = a\frac{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}}d\lambda. \quad (171\text{b})$$

Da die Ellipsoide mit wachsendem λ gröfser werden, ist diese Normale nach aufsen gerichtet.

Nach diesen geometrischen Betrachtungen kehren wir nun zu unseren Potentialen (170a und b) zurück. Da ψ nur von ν abhängt, sind die Niveauflächen bestimmt durch $\nu = \text{const}$, das sind also die Hyperboloide unseres Systems. Da diese sich alle in's Unendliche erstrecken, können wir jedenfalls nicht im ganzen Raume ein elektrisches Feld dadurch darstellen. Dagegen liefert χ die Niveauflächen $\lambda = \text{const}$, das sind die abgeplatteten Rotationsellipsoide. Wählen wir eines davon mit dem besonderen Werth λ_0 als Oberfläche eines geladenen Conductors, so giebt uns $\chi = \operatorname{arc\,cot}\lambda$ für $\lambda \geqq \lambda_0$ das Potential des äufseren Feldes, während für $\lambda < \lambda_0$ das Potential unveränderlich gleich $\operatorname{arc\,cot}\lambda_0$ zu setzen ist. In grofser Entfernung, d. h. für grofses λ, nähert sich $\operatorname{arc\,cot}\lambda$ der 0 wie $\frac{1}{\lambda}$ oder wie $\frac{a}{a\lambda}$. Der Nenner $a\lambda$ mifst die Radien der grofsen Kugeln, in welche die fernen Ellipsoide übergehen. Dieses Verhalten entspricht dem Verlauf des Potentials in grofser Entfernung, herrührend von einer elektrischen Menge a. So grofs mufs also, wenn kein weiterer Proportionalitätsfactor zugesetzt wird,

die Gesammtladung des Conductors sein. Will man aber eine willkürliche Gesammtladung $\mathfrak{e}$ auf dem Conductor annehmen, so hat man für das Potential zu setzen:

$$\chi = \frac{\mathfrak{e}}{a} \operatorname{arc\,cot} \lambda, \tag{172}$$

was jetzt auch gelten soll.

Der Lauf der Kraftlinien im Aufsenraum geht normal durch die Ellipsoide, folgt also den Schnittcurven der Hyperboloide und Meridianebenen.

Von besonderem Interesse ist die Vertheilung der Flächendichtigkeit e über den Conductor.

Man findet diese aus dem Sprung des Differentialquotienten von χ nach der Normale beim Durchgang durch die geladene Fläche. Da innen kein Gefälle vorhanden ist, bleibt nur das äufsere übrig. Es ist

$$4\pi e = -\left(\frac{d\chi}{d n_a}\right)_{\lambda = \lambda_0}. \tag{173}$$

Die dem Zuwachs $d\lambda$ entsprechende Normalenlänge haben wir in Gleichung (171b) angegeben, und $d\chi$ finden wir durch Differentiation von (172):

$$d\chi = \frac{\mathfrak{e}}{a} d \operatorname{arc\,cot} \lambda = -\frac{\mathfrak{e}}{a}\frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

Mithin wird

$$4\pi e = \frac{\frac{\mathfrak{e}}{a}\frac{d\lambda}{\lambda_0^2 + 1}}{a\frac{\sqrt{\lambda_0^2 + \nu^2}}{\sqrt{\lambda_0^2 + 1}} d\lambda} = \frac{\mathfrak{e}}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2 + 1}\sqrt{\lambda_0^2 + \nu^2}}. \tag{173a}$$

Die Variabele ν bestimmt die Zonen auf der Ellipsoidfläche ähnlich wie ein Maafs der geographischen Breite. Am Aequator ist $\nu = 0$. Dort hat die Dichtigkeit den gröfsten Werth

$$e_{\nu = 0} = \frac{\mathfrak{e}}{4\pi a^2 \lambda_0 \sqrt{\lambda_0^2 + 1}}, \tag{173b}$$

entsprechend der dort stärksten Krümmung. An den abgeplatteten Polen $\nu = \pm 1$ herrscht die geringste Dichtigkeit

$$e_{\nu = 1} = \frac{\mathfrak{e}}{4\pi a^2 (\lambda_0^2 + 1)}. \tag{173c}$$

Degenerirt die Gestalt des Conductors in eine platte Scheibe vom Radius a, so ist $\lambda_0 = 0$ zu setzen. Die Dichtigkeit auf der oberen, wie auf der unteren Seite ist dann entsprechend (173a)

$$\varepsilon = \frac{e}{4\pi a^2 |\nu|}.$$

An Stelle der elliptischen Coordinate ν, deren absoluter Betrag vorstehend mit $|\nu|$ bezeichnet ist, kann man hier den variabelen Radius $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ einführen, denn aus (171) folgt für $\lambda = 0$

$$\varrho^2 = y^2 + z^2 = a^2(1 - \nu^2)$$

$$a \cdot |\nu| = \sqrt{a^2 - \varrho^2}$$

also

$$\varepsilon = \frac{e}{4\pi a \sqrt{a^2 - \varrho^2}}. \tag{173d}$$

Dieser Ausdruck hat im Centrum den Minimalwerth $\frac{e}{4\pi a^2}$, nimmt nach dem Rand hin allmählich zu und wird daselbst unendlich, trotz der endlichen Gesammtladung e.

Nach derselben Methode der Substitution von $(x + i a)$ an Stelle von x wollen wir noch aus einer anderen der uns bekannt gewordenen Potentialfunctionen neues Material gewinnen. Die Kugelfunction zweiter Art $Q_{1,0}$, welche wir aus (166_1) erhalten, wenn wir $C = -1$ setzen, mufs nach Erweiterung sowohl mit r, wie mit $\frac{1}{r^3}$ eine Lösung der LAPLACE'schen Gleichung geben. Wir wählen die erste Form

$$\varphi = r\left(-1 + \mu \ln \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) = -r + x \ln \sqrt{\frac{r+x}{r-x}}, \tag{174}$$

substituiren $x + i a$ für x, also auch $r' = a(\lambda + i\nu)$ für r, und benutzen dann die Relation $x = a\lambda\nu$.

Die Umwandlung, welche der Logarithmus dadurch erfährt, haben wir soeben berechnet, siehe Gleichung (170). Man erhält

$$\varphi = -a(\lambda + i\nu) + (a\lambda\nu + i a) \cdot \left(\ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} + i \operatorname{arc\,cot} \lambda\right)$$

oder in reell und imaginär gespalten:

$$\varphi = \left\{-a\lambda + a\lambda\nu \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} - a \operatorname{arc\,cot}\lambda\right\}$$
$$+ i\left\{-a\nu + a\lambda\nu \operatorname{arc\,cot}\lambda + a \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}}\right\}.$$

Jede dieser beiden geschweiften Klammern, für sich genommen, mufs der LAPLACE'schen Gleichung genügen. Nun steht aber in beiden als letzter Summand je ein Ausdruck, den wir aus Gleichung (170a, b) bereits als Lösung derselben linearen homogenen Differentialgleichung erkannt haben. Wenn wir diese also fortlassen, so mufs das Uebrige auch noch der LAPLACE'schen Gleichung genügen. Die beiden neu gewonnenen Potentialfunctionen sind also nach Weglassung des constanten Factors a

$$\psi = \lambda \cdot \left\{ -1 + \nu \ln \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \right\} \tag{174a}$$

$$\chi = \nu \cdot \{ -1 + \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda \}. \tag{174b}$$

Die zweite Function χ ist geeignet die Influenzirung eines platt-ellipsoidischen Conductors durch ein gleichförmiges äufseres Feld (in Richtung der x-Axe) darzustellen.

Das ursprünglich gleichförmige Feld hat als Potential φ_1 eine lineare Function von x, und da $x = a \lambda \nu$ ist, können wir ansetzen

$$\varphi_1 = C_1 \lambda \nu. \tag{175}$$

Diesem superponiren wir im äufseren Raume ($\lambda \geqq \lambda_0$) als Störungsfeld der influenzirten Ladungen

$$\varphi_2 = C_2 \chi = C_2 \nu \{ -1 + \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda \}. \tag{175a}$$

In grofser Entfernung λ verschwindet dieses Potential, wie $C_2 \nu \cdot \frac{1}{3 \lambda^2}$, entspricht also durchaus der hier gemachten Vorstellung einer Elektricitätsvertheilung von der algebraischen Summe 0. Aufserdem wird wegen des Factors ν in der ganzen Mittelebene $\chi = 0$, was bei der entgegengesetzt gleichen Vertheilung zu beiden Seiten auch nöthig ist. Das Gesammtpotential im äufseren Raume ist also

$$\varphi_a = C_1 \lambda \nu + C_2 \nu \{ -1 + \lambda \operatorname{arc} \cot \lambda \}. \tag{175b}$$

Ferner verlangen wir, dafs im Innern des Conductors

$$\varphi_i = 0 \tag{175c}$$

sei. Damit ist der Ansatz fertig, es handelt sich nur um die Bestimmung der Constanten C_2, welche dadurch gewonnen wird, dafs das Potential an einer mit einfacher Schicht belegten Fläche selbst stetig bleibt, dafs also φ_a für $\lambda = \lambda_0$ den Werth 0 besitzen mufs, der für φ_i gilt:

$$0 = C_1 \lambda_0 + C_2 \{ -1 + \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0 \}$$

$$C_2 = C_1 \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 \operatorname{arc} \cot \lambda_0}. \tag{175d}$$

Die Flächendichtigkeit findet man nach der Formel

$$4\pi e = -\left(\frac{d\varphi_a}{d n_a}\right)_{\lambda=\lambda_0}.$$

Das Differenziren nach der Normale geschieht bei constant gehaltenem ν, während λ um $d\lambda$ wächst:

$$d\varphi_a = C_1\,\nu\cdot\left[1+\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0\operatorname{arc\,cot}\lambda_0}\left\{\operatorname{arc\,cot}\lambda-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right\}\right]d\lambda.$$

Hierin ist $\lambda=\lambda_0$ zu setzen

$$(d\varphi_a)_{\lambda=\lambda_0} = C_1\,\nu\cdot\frac{d\lambda}{(\lambda_0^2+1)(1-\lambda_0\operatorname{arc\,cot}\lambda_0)}.$$

Den Ausdruck für $d n_a$ entnehmen wir aus (171b) und erhalten:

$$4\pi e = -\frac{C_1\,\nu\,\dfrac{d\lambda}{(\lambda_0^2+1)(1-\lambda_0\operatorname{arc\,cot}\lambda_0)}}{a\dfrac{\sqrt{\lambda_0^2+\nu^2}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}d\lambda}$$

oder

$$e = -\frac{C_1}{4\pi a}\cdot\frac{\nu}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\sqrt{\lambda_0^2+\nu^2}(1-\lambda_0\operatorname{arc\,cot}\lambda_0)}. \tag{175e}$$

Der Factor ν mufs gleichstimmig mit x sein, ferner ist $(1-\lambda\operatorname{arc\,cot}\lambda)$ immer positiv, defshalb ist e auf der Seite der positiven x negativ belegt und umgekehrt. Der Uebergang zur Kugelgestalt kann gemacht werden, wenn man a verschwindend klein, λ_0 unendlich und das Product $a\lambda_0$ gleich dem endlichen Kugelradius setzt. Man kommt so zu der früher für einen Kugelconductor abgeleiteten Vertheilung zurück. Das Potential χ in Gleichung (174b) findet auch Anwendung bei der Berechnung der Magnetisirung eines platten Rotationsellipsoids durch ein gleichförmiges Magnetfeld.

Die im Vorstehenden an zwei Beispielen erprobte Methode der Ersetzung von x durch $x+ia$ bot den Vortheil, dafs wir von den gefundenen Functionen ψ und χ von vornherein wufsten, dafs sie der LAPLACE'schen Gleichung genügen, obgleich sie in elliptischen Coordinaten ausgedrückt erschienen, auf welche wir die Operation $\Delta\varphi$ nicht transformirt haben. Aber eine gewisse Einseitigkeit liegt darin, dafs bei dieser complexen Substitution der aus r entstehende Ausdruck $r'=a(\lambda+i\nu)$ in den beiden Zahlen λ und ν immer nur auf die elliptischen Coordinaten a b g e p l a t t e t e r Systeme führt.

Zwar könnte man durch geeignete complexe Gröfsen an Stelle von y und z auch zu länglichen Systemen elliptischer Coordinaten (mit zweischaligen Hyperboloiden) gelangen, man könnte dann aber nicht die nur von $\mu = x/r$ abhängigen Kugelfunctionen zur Ableitung analoger Resultate verwenden.

Diese Lücke läſst sich aber nachträglich ausfüllen und eine directe Uebertragung der für abgeplattete Systeme gewonnenen Formeln auf solche für längliche Systeme erreichen. Man braucht in den Coordinatengleichungen (171), welche ja unabhängig von der Art ihrer Herleitung gültig sind, sowie auch in allen durch a, λ, ν ausgedrückten Formeln nur a und λ rein imaginär zu setzen, so ist der Uebergang gemacht. Der deutlicheren Unterscheidung wegen wollen wir für das längliche System andere Buchstaben wählen und schreiben jetzt folgende Substitutionen vor:

$$\left.\begin{aligned} a &= i\,b \\ \lambda &= -\,i\,\sigma \\ \nu &= \tau \\ \eta &= \eta. \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

Die Coordinatengleichungen (171) gehen über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= b\,\sigma\,\tau \\ y &= b\sqrt{\sigma^2 - 1}\,\sqrt{1 - \tau^2}\cos\eta \\ z &= b\sqrt{\sigma^2 - 1}\,\sqrt{1 - \tau^2}\sin\eta. \end{aligned}\right\} \tag{176a}$$

Die Flächen $\sigma = \text{const}$ (durch Elimination von τ und η gewonnen) haben die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2\sigma^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2(\sigma^2 - 1)} = 1$$

und geben längliche Rotationsellipsoide mit dem gemeinsamen Focalabstand b in der x-Axe. Der Spielraum von σ ist $+1 \leqq \sigma \leqq +\infty$.

Die Schaar der zweischaligen Hyperboloide mit ebenfalls dem Focalabstand b ist:

$$\frac{x^2}{b^2\tau^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2(1 - \tau^2)} = 1.$$

Spielraum der Variabelen τ ist $-1 \leqq \tau \leqq +1$. Die Meridianebenen liegen wie immer bisher um die x-Axe. $0 \leqq \eta \leqq 2\pi$.

Die dem Zuwachs $d\sigma$ entsprechende Länge der äuſseren Nor-

male auf den Ellipsoiden kann man aus Gleichung (171 b) durch die Substitutionen (176) finden:

$$n_\sigma = i\,b\,\frac{\sqrt{-\sigma^2+\tau^2}}{\sqrt{-\sigma^2+1}}(-i\,d\sigma) = b\,\frac{\sqrt{\sigma^2-\tau^2}}{\sqrt{\sigma^2-1}}\,d\sigma. \qquad (176\text{ b})$$

Nun ziehen wir die beiden Potentiale (170 a und b) heran. Diese liefern zufolge (176):

$$\psi = \ln\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \qquad (177\text{ a})$$

$$\chi = \operatorname{arc\,cot}(-i\,\sigma) = i\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}\,. \qquad (177\text{ b})$$

Die Niveauflächen von ψ sind die zweischaligen Hyperboloide, sie laufen in's Unendliche und sind elektrostatisch nicht zu verwenden. Dagegen sind die Niveauflächen von χ die länglichen Ellipsoide. (Der Factor i bei einem Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung hat nichts zu bedeuten und kann einfach gestrichen werden.) Eines von ihnen, $\sigma = \sigma_0$, kann als Oberfläche eines geladenen Conductors angesehen werden. In grofser Entfernung wird $\chi_\infty = \frac{1}{\sigma} = \frac{b}{b\,\sigma}$, $b\,\sigma$ sind die Radien der grofsen Kugeln, in welche die fernen Ellipsoide übergehen. Die Gesammtladung des Conductors ist also numerisch gleich b, soll die Ladung einen beliebigen Werth $\mathfrak{e}$ haben, so hat man das Potential zu setzen:

$$\chi = \frac{\mathfrak{e}}{b}\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}\,. \qquad (177\text{ c})$$

Die Dichtigkeit e auf der Oberfläche ist gegeben durch

$$4\pi e = -\left(\frac{d\chi}{d n_\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_0}.$$

Der Werth $d n_\sigma$ ist in (176 b) mitgetheilt, ferner ist

$$d\chi = -\frac{\mathfrak{e}}{b}\,\frac{d\sigma}{\sigma^2-1},$$

also erhält man:

$$e = \frac{\mathfrak{e}}{4\pi b^2\sqrt{\sigma_0^2-1}\,\sqrt{\sigma_0^2-\tau^2}} \qquad (177\text{ d})$$

Minimum am Aequator $e_{\tau=0} = \dfrac{e}{4\pi b^2 \sigma_0 \sqrt{\sigma_0^2 - 1}}$

Maximum an den Polen $e_{\tau=1} = \dfrac{e}{4\pi b^2 (\sigma_0^2 - 1)}$.

Degenerirt das Ellipsoid in einen verschwindend dünnen Stab von der Länge (2 b), so geht σ_0 gegen 1, und e wird auf der ganzen Stablänge unendlich. Die Capacität geht gegen Null herunter, während sie bei dem zur Kreisscheibe degenerirten platten Ellipsoid endlich bleibt.

Schliefslich transformiren wir noch die Potentiale (174a und b) mit Hülfe der Gleichungen (176). Es entstehen folgende Formen:

$$\psi = -i\sigma\left\{-1 + \tau \ln \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\right\} \tag{178a}$$

$$\chi = \tau\left\{-1 - i\sigma \operatorname{arc\,cot}(-i\sigma)\right\} = \tau\left\{-1 + \sigma \ln \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}\right\}. \tag{178b}$$

Hier ist wieder ψ unbrauchbar, aber χ kann dazu dienen, die Störung darzustellen, welche ein gleichförmiges elektrisches Feld dadurch erfährt, dafs man einen länglich rotationsellipsoidischen Conductor der Länge nach hineinbringt. Auch bei der Magnetisirung länglicher Ellipsoide durch ein gleichförmiges Magnetfeld hat man das Potential (178 b) zu benützen.

§ 46. Die Kugelfunctionen für nicht ganzzahlige Werthe von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$.

Nach dem von uns zu Anfang dieses ganzen Kapitels eingeschlagenen Wege zur Auffindung der Kugelfunctionen, nämlich Betrachtung der höheren Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ nach den Coordinaten, war es selbstverständlich, dafs wir unter den Zahlen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ natürliche Ordnungszahlen 0, 1, 2, ... verstanden; es ergab sich auch die Beschränkung $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$. Die Differentialgleichung der $P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ (137) und die besondere Differentialgleichung der $P_{\mathfrak{n},0}$ (139) haben indessen auch einen Sinn, wenn $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ als beliebige gebrochene oder irrationale Zahlen angesetzt werden, und in Bezug auf ihre Ableitung aus der Laplace'schen Gleichung für Polarcoordinaten hat man auch die Gewähr, dafs dann noch die

Gleichung (136) gültige Potentialfunctionen liefern wird. Auf diese wollen wir zum Schlufs noch einen Blick werfen.

Wir beginnen die Erweiterung des Zahlengebietes mit der Frage, was die Integrale der betreffenden Differentialgleichungen bedeuten, wenn $\mathfrak{n}$ eine ganze, aber negative Zahl (excl. 0) ist. Wir setzen zu dem Zwecke $\mathfrak{n} = -(\mathfrak{n}' + 1)$, und denken uns unter $\mathfrak{n}'$ eine ganze positive Zahl (incl. 0). Nur der Zahlenfactor des dritten Gliedes der Differentialgleichungen (137) resp. (139) wird dadurch betroffen und es zeigt sich:

$$(\mathfrak{n} - \mathfrak{m})(\mathfrak{n} + \mathfrak{m} + 1) = (-\mathfrak{n}' - 1 - \mathfrak{m})(-\mathfrak{n}' - 1 + \mathfrak{m} + 1)$$
$$= (\mathfrak{n}' - \mathfrak{m})(\mathfrak{n}' + \mathfrak{m} + 1).$$

Ganz so auch im Spezialfalle $\mathfrak{m} = 0$.

Die Differentialgleichungen mit negativem $\mathfrak{n}$ sind also identisch mit denjenigen für das positive $\mathfrak{n}'$. Folglich auch ihre Lösungen. Neue Functionscharaktere liefert also diese erste Erweiterung nicht. Interessant ist aber zu beobachten, dafs die Kugelfunctionen erster und zweiter Art ihre Rollen austauschen. Man mufs setzen:

$$P_{-(\mathfrak{n}'+1),\,\mathfrak{m}} = Q_{\mathfrak{n}',\,\mathfrak{m}},$$
$$Q_{-(\mathfrak{n}'+1),\,\mathfrak{m}} = P_{\mathfrak{n}',\,\mathfrak{m}}.$$

Diese Beziehung gilt übrigens auch noch, wenn $\mathfrak{n}'$ keine natürliche Zahl mehr ist.

Auch negative ganze Zahlen für $\mathfrak{m}$ lehren uns nichts Neues. Ein Blick auf die Function (136) zeigt, dafs ein Zeichenwechsel von $\mathfrak{m}$ gleichbedeutend ist mit einem Wechsel der Umlaufsrichtung des Längenwinkels η. Dieser Wechsel ist aber hier, wo es sich um nicht rotatorische Phänomene handelt, ohne Bedeutung.

Setzen wir jetzt aber $\mathfrak{m}$ als eine echt oder unecht gebrochene (eventuell auch irrationale) Zahl fest, so tritt eine Veränderung gegen früher hervor. Zwar kann man noch die Relation (138 a) ebenso ableiten, aber die Gleichung (138 b) verliert ihren Sinn. Man kann die Function $P_{\mathfrak{n},\,\mathfrak{m}}$ nicht mehr ableiten aus $P_{\mathfrak{n},\,0}$; es genügt daher nicht mehr allein, die Integrale der einfacheren Differentialgleichung (139) aufzusuchen, sondern man mufs auf die allgemeinere Differentialgleichung (137) selbst zurückgehen. Diese kann man auch direct durch eine positive Potenzreihe von μ integriren:

$$P_{\mathfrak{n},\,\mathfrak{m}} = B_0 + B_1\,\mu + B_2\,\mu^2 + \ldots + B_a\,\mu^a + \ldots \qquad (179)$$

Man findet dann ganz analog, wie bei der Integration der Differentialgleichung (139), dafs ein gerader und ein ungerader Coefficient,

z. B. B_0 und B_1 willkürlich, oder nach anderweitigen Rücksichten, gewählt werden können und dafs für die höheren die procurrente Formel gilt:

$$B_{\mathfrak{a}+2} = \frac{(-\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+\mathfrak{a})(\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+\mathfrak{a}+1)}{(\mathfrak{a}+1)(\mathfrak{a}+2)} B_{\mathfrak{a}}. \qquad (179\,\mathrm{a})$$

Wenn nun $(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$ eine positive ganze Zahl (incl. 0) ist, so werden die Coefficienten

$$B_{(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})+2} = B_{(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})+4} = \text{alle alternirend folgenden} = 0.$$

Die Lösung zerfällt in eine ganze Function $(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$ten Grades, welche, entsprechend $(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$, nur gerade oder nur ungerade Potenzen von μ hat, und in eine unendliche Potenzreihe, welche für $\mu^2 < 1$ convergirt. Bei ganzzahligem $\mathfrak{n}$ sind dies die beiden particulären Integrale $P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ und $Q_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$, welche wir schon kennen. Hier tritt nun aber die Möglichkeit auf, ganz ebensolche Lösungen zu bilden, wenn zwar $(\mathfrak{n}-\mathfrak{m})$ positiv ganzzahlig oder 0 ist, aber $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$ einzeln gebrochen oder irrational sind. Das führt dann zu eigenartigen von den früher betrachteten wesentlich verschiedenen Potentialfunctionen. Setzen wir der Einfachheit wegen in (136) die Phasenconstante $c = \frac{\pi}{2}$, nehmen also

$$\varphi = r^{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}} \cdot \sin \mathfrak{m}\,\eta \qquad (179\,\mathrm{b})$$

oder

$$\varphi = \frac{1}{r^{\mathfrak{n}+1}} P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}} \sin \mathfrak{m}\,\eta. \qquad (179\,\mathrm{c})$$

Für $\mathfrak{m} = 0$ ist der Sinus ringsherum $= 0$. Für $\mathfrak{m} = 1$ existiren zwei diametral gegenüberliegende Meridianebenen $\eta = 0$ und $\eta = \pi$, in denen $\varphi = 0$ ist. Wenn nun $\mathfrak{m}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt, so wird $\sin \mathfrak{m}\,\eta = 0$ erstens für $\eta = 0$ und zweitens für $\eta = \frac{\pi}{\mathfrak{m}}$, welch' letzteres im dritten oder vierten Quadranten des Längenwinkels liegt. (Würden wir η nicht auf das Intervall 0 bis 2π beschränken, so würden jetzt die Functionen vieldeutig werden.) Wir erhalten somit zwei in der x-Axe als convexer Kante unter beliebigem Winkel zusammenstofsende Halbebenen, in welchen das Potential 0 herrscht. Diese Flächen können daher als leitend mit der Erde verbundene Conductorgrenzen (etwa als sehr grofse geknickte Blechplatte) gedacht werden. Hinter dem concaven Theile gilt dann überall $\varphi = 0$,

während vor dem convexen Theile jeder der vorstehenden Ausdrücke mit

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \quad \text{oder} \quad = \mathfrak{m} + 1, \quad \mathfrak{m} + 2, \ldots \text{etc.}$$

eine Potentialfunction darstellt. Die Flächenbelegung berechnet man aus der Formel:

$$4\pi e = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}\right) \text{ für } \eta = 0 \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{\pi}{\mathfrak{m}}.$$

Die äufsere Normale auf der Meridianebene $\eta = 0$ geht in Richtung des wachsenden $d\eta$ auf einem Kreise vom Radius $r \sin \vartheta = r\sqrt{1-\mu^2}$, ist also

$$d n_a = r\sqrt{1-\mu^2} \cdot d\eta,$$

anderseits ist

$$d\varphi = \mathfrak{m}\left\{\begin{matrix} r^{\mathfrak{n}} \\ \text{oder} \\ r^{-(\mathfrak{n}+1)} \end{matrix}\right\} P_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}} \cos \mathfrak{m}\eta \cdot d\eta,$$

also wegen $\cos \mathfrak{m}\eta = 1$:

$$4\pi e = \mathfrak{m}\left\{\begin{matrix} r^{\mathfrak{n}-1} \\ \text{oder} \\ r^{-(\mathfrak{n}+2)} \end{matrix}\right\} P_{\mathfrak{n}\,\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}-1}. \tag{179d}$$

In der Kante selbst wird die Dichtigkeit unendlich, weil $\sqrt{1-\mu^2}$ gegen Null strebt und der Exponent $\mathfrak{m} - 1$ jetzt negativ ist.

Auch die Superposition einer ganzen Reihe solcher Potentiale, alle mit dem gleichen $\mathfrak{m}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, kann man ansetzen, und findet so eine grofse Mannigfaltigkeit.

Endlich wollen wir $\mathfrak{n}$ gebrochen annehmen ohne Beziehung zu $\mathfrak{m}$. Wir wollen uns sogar auf den einfachsten Fall $\mathfrak{m} = 0$, also auf die rein zonalen Kugelfunctionen beschränken.

Es geht aus der früher durchgeführten Integration der hier einschlägigen Differentialgleichung (139) hervor, dafs bei nicht ganzzahligem $\mathfrak{n}$ keines der beiden particulären Integrale eine abbrechende Potenzreihe bildet, sondern dafs man zwei von einander getrennte unendliche Reihen erhält, welche sowohl für $\mu = -1$ wie für $\mu = +1$ logarithmisch unendlich werden. Dergleichen Ausdrücke haben wir schon unter den Functionen $Q_{\mathfrak{n},0}$ kennen gelernt (Anfang des § 45), aber noch fehlen uns Functionen, welche für den einen Pol, also entweder für $\mu = +1$ oder für $\mu = -1$ unendlich werden, während sie am anderen Pol endlich und stetig bleiben. Diese erhält man durch Substitution einer anderen Variabelen an Stelle von μ, und zwar einer solchen, welche nicht vom ganzen, sondern vom halben

Polwinkel regiert wird, entweder $\sin\frac{\vartheta}{2}$ oder $\cos\frac{\vartheta}{2}$. Diese Substitution würde aber nutzlos sein, wenn wir sie an der fertigen Reihe $P_{n,0}$ ausführten, wir müssen sie bereits in der Differentialgleichung (139) vornehmen, und ein neues Integral als Potenzreihe einer der beiden Kreisfunctionen des halben Polwinkels aufstellen. Wir haben die Wahl zwischen

$$1-\mu = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \quad \text{und} \quad 1+\mu = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Beide führen im Wesentlichen zu dem gleichen Resultat. Wählen wir die erstere, und setzen zur Abkürzung

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = s,$$

so ist

$$1-\mu = 2s, \qquad 1-\mu^2 = 4s(1-s),$$

$$-d\mu = 2\,ds, \quad \text{also} \quad \frac{d}{d\mu} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}.$$

Die Differentialgleichung (139) kann in der Form geschrieben werden

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP_{n,0}}{d\mu}\right) + n(n+1)P_{n,0} = 0$$

und geht nach der Substitution zufolge der angeführten Formeln über in

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(4s(1-s)\frac{dP_{n,0}}{-2\,ds}\right) + n(n+1)P_{n,0} = 0$$

oder kürzer

$$\frac{d}{ds}\left(s(1-s)\frac{dP_{n,0}}{ds}\right) + n(n+1)P_{n,0} = 0. \tag{180}$$

Wählen wir die zweite Möglichkeit, und setzen

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2} = t,$$

so ist

$$1+\mu = 2t, \qquad 1-\mu^2 = 4t(1-t)$$

$$d\mu = 2\,dt, \quad \text{also} \quad \frac{d}{d\mu} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}$$

und die Differentialgleichung geht über in

$$\frac{d}{dt}\left(t(1-t)\frac{dP_{\mathfrak{n},0}}{dt}\right) + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)P_{\mathfrak{n},0} = 0.$$

Das ist genan dieselbe Form, wie bei Einsetzung von s, deshalb auch dieselbe Lösung. Wir setzen als Integral eine Potenzreihe an

$$P_{\mathfrak{n},0} = C_0 + C_2 s + C_1 s^2 + C_3 s^3 + \ldots + C_{\mathfrak{a}} s^{\mathfrak{a}} + \ldots, \quad \text{(180 a}$$

fügen diese in Differentialgleichung (180) ein, führen die Differentiationen und Multiplicationen gliedweise aus und fordern schließlich jeden Coefficienten der daraus entstehenden Potenzreihe gleich Null, so erhalten wir folgende Reihe von Bedingungen:

$$\begin{aligned} C_1 + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)C_0 &= 0 \\ 2^2 C_2 - [2\cdot 1 - \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)]\,C_1 &= 0 \\ 3^2 C_3 - [3\cdot 2 - \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)]\,C_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\mathfrak{a}+1)^2 C_{\mathfrak{a}+1} - [(\mathfrak{a}+1)\,\mathfrak{a} - \mathfrak{n}(\mathfrak{n}+1)]\,C_{\mathfrak{a}} &= 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Also C_0 bleibt willkürlich, für die folgenden gilt die procurrente Formel:

$$C_{\mathfrak{a}+1} = \frac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{n})(\mathfrak{a}+\mathfrak{n}+1)}{(\mathfrak{a}+1)^2}\,C_{\mathfrak{a}}. \tag{180b}$$

Ist $\mathfrak{n}$ eine ganze Zahl, so bricht die Reihe der Coefficienten mit dem höchsten Gliede $C_{\mathfrak{n}}$ ab, während alle folgenden gleich Null werden. In diesem Falle kann man auch noch nachweisen, daß nach Rückwärtssubstitution von μ an Stelle von s und geeigneter Wahl von C_0 wieder die uns bekannten Kugelfunctionen erster Art zum Vorschein kommen. Wenn aber $\mathfrak{n}$ keine ganze Zahl ist, so erhalten wir jetzt folgende unendliche Reihe:

$$\left.\begin{aligned} P_{\mathfrak{n},0} = C_0 \Big\{ 1 &+ \frac{(-\mathfrak{n})(\mathfrak{n}+1)}{1\cdot 1}s + \frac{(-\mathfrak{n})(-\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}+2)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}s^2 \\ &+ \frac{(-\mathfrak{n})(-\mathfrak{n}+1)(-\mathfrak{n}+2)(\mathfrak{n}+1)(\mathfrak{n}+2)(\mathfrak{n}+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}s^3 + \ldots \Big\} \end{aligned}\right\} \tag{180c}$$

oder als hypergeometrische Reihe in symbolischer Schreibweise:

$$P_{\mathfrak{n},0} = C_0 \cdot F(-\mathfrak{n},\, \mathfrak{n}+1,\, 1;\, s).$$

Natürlich würden wir genau dieselbe Reihe auch für die Variabele t erhalten.

Die Form der hypergeometrischen Reihe giebt uns die Sicherheit, dafs für echt gebrochenes s der Ausdruck einen endlichen Werth hat. Für $s = 1$ wird er logarithmisch unendlich, weil auch hier, wie schon früher, der kritische Fall $\alpha + \beta = \gamma$ vorliegt.

Diese Function $P_{n,0}$ von $s = \sin\frac{\vartheta}{2}$ besitzt also an dem Pol $\vartheta = 0$ den endlichen Werth C_0, während sie an dem entgegengesetzten Pole $\vartheta = \pi$, also für $s = 1$, zur Grenze $\pm\infty$ läuft.

Würden wir an Stelle von s als Variabele $t = \cos\frac{\vartheta}{2}$ wählen, so würde für den Pol $\vartheta = 0$ ein unendlicher, und für den Pol $\vartheta = \pi$ ein endlicher Werth resultiren.

Ebenso wie die Function $P_{n,0}$ bei ganzzahligem n gewisse Nullstellen für bestimmte Werthe von ϑ oder μ oder s oder t besitzt, so auch bei nicht ganzzahligem n. Die Orte, welche denselben Polarwinkel besitzen, liegen auf Kreiskegelmänteln, also auch die Nullstellen von $P_{n,0}$. Wenn man nun n stetig variabel setzt, also alle auch irrationalen Werthe durchlaufen läfst, so verändern die Kegelmäntel, welche die Nullstellen enthalten, ihren Oeffnungswinkel ϑ stetig. Wie dieser Lauf der Nullwerthkegel vor sich geht, kann man sich leicht veranschaulichen. Wir wählen die Darstellung durch s, welche für $\vartheta = 0$ endlich bleibt und nehmen C_0 positiv an. Wenn $n = 0$ ist, giebt es gar keine Nullstellen, weil P_{00} einen constanten endlichen Werth hat. Beginnt nun n über Null zu wachsen, so löst sich von der negativen x-Axe ganz allmählich ein Nullkegel ab (die Spitze liegt immer im Anfangspunkt der Coordinaten.) Im concaven Raum ist $P_{n,0}$ negativ. Wenn n bis $\frac{1}{2}$ gestiegen ist, hat der Kegelmantel eine Oeffnung von etwa 50^0 gegen die negative x-Axe, und bei $n = 1$ erreicht er die Aequatorebene. Wächst n über 1, so wird er concav nach der Seite der positiven x-Axe, zugleich löst sich ein zweiter Nullkegel auf dieselbe Weise ab wie der erste etc.

Aus den $P_{n,0}$ für echt gebrochenes n können wir nun Potentialfunctionen

$$\varphi = r^n P_{n,0} \tag{180d}$$

und

$$\varphi = \frac{1}{r^{n+1}} P_{n,0} \tag{180e}$$

bilden, welche auf einem Kegelmantel von beliebigem Oeffnungswinkel gleich Null werden. Setzen wir in dem concaven Raum, wo bei Fortsetzung der Function $P_{n,0}$ die bis in's negative Unendliche sinkenden Werthe liegen würden, überall $\varphi = 0$, so haben wir eine Bedingung des elektrischen Gleichgewichts auf einem unendlich ausgedehnten leitenden Kegel, wofür man praktisch auch setzen kann einen sehr grofsen Conductor, welcher eine kegelförmige Spitze besitzt. Die Dichtigkeit wird an der Spitze unendlich grofs. Ebenso die Intensität des elektrischen Feldes.

Viertes Kapitel.

§ 47. Zweidimensionale Probleme.

Schliefslich soll noch die durch Eleganz ausgezeichnete Methode erwähnt werden, auf welche die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen die zweidimensionalen Probleme der Elektrostatik behandelt. Die Bezeichnung „zweidimensional" ist so zu verstehen, dafs die dritte Coordinate, etwa z, gar keine Rolle spielt, weil alle Körper unendlich lange Cylinder sind, deren erzeugende Geraden parallel zur z-Axe sind, und weil die Dichte ihrer Ladung von z unabhängig ist. Dasselbe gilt dann auch für die Potentialfunction, so dafs die Laplace'sche Operation die Form

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

annimmt. Da wir also den Buchstaben z in diesem Paragraphen nicht in der bisherigen Bedeutung brauchen, wollen wir hier

$$z = x + iy \tag{181}$$

setzen; z ist dann die complexe Variabele, von deren Functionen die Rede sein soll.

Als Function von z könnte man jede Function

$$\chi(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) \tag{182}$$

bezeichnen, was für Functionen auch φ und ψ sein mögen; denn durch Angabe eines complexen Werthes für z sind nach (181) x und y und nach (182) auch χ bestimmt. Man ist aber überein-

gekommen, den Begriff einer Function des complexen Arguments z auf solche Functionen χ einzuschränken, welche x und y nur in der Verbindung $x + iy$ enthalten, bei welchen also

$$d\chi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy$$

proportional zu

$$dz = dx + i\,dy$$

ist. Dazu ist erforderlich, daſs

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right):1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right):i,$$

und dafür sind nothwendig und hinreichend die Bedingungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{183}$$

Nur wenn sie erfüllt sind, kann man der Function $\chi(z)$ einen Differentialquotienten nach z

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

zuschreiben. Da die Gleichungen (183), wenn sie für φ und ψ gelten, auch durch die Functionen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ erfüllt werden, so ist dann auch $\frac{d\chi}{dz}$ Function des complexen Arguments z, so daſs man auch von den höheren Differentialquotienten $\frac{d^2\chi}{dz^2}$, $\frac{d^3\chi}{dz^3}$ etc. in bestimmtem Sinne reden kann.

Die hohe Bedeutung dieser Functionen für elektrische Probleme erkennt man, wenn man aus den Gleichungen (183) die eine der Functionen φ und ψ eliminirt; man findet dabei

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

Der reelle und der imaginäre Bestandtheil einer jeden Function der complexen Veränderlichen z sind also Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$. Um ein vorgelegtes Problem der Elektrostatik zu lösen, hat man demnach nur eine Function $\chi(z)$ zu suchen, bei welcher entweder der reelle oder der imaginäre Theil den Grenzbedingungen genügt.

Aus (183) folgt ferner

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \tag{185}$$

Ist φ die Potentialfunction, so sind

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

die Gleichungen der Niveauflächen, welche hier natürlich Cylinderflächen sind. Ihre Schnitte mit der xy-Ebene bezeichnen wir als Niveaulinien. Nun sagt (185) aus, daſs die Linien $\varphi = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$ auf einander senkrecht stehen. Ist also φ die Potentialfunction, so sind $\psi = \text{const}$ die Gleichungen der Kraftlinien, und umgekehrt.

Betrachten wir als einfachstes Beispiel die Function

$$\chi(z) = -\log z.$$

Die Polarcoordinaten ϱ, ϑ in der Ebene hängen mit den rechtwinkligen Coordinaten durch die Relationen

$$x = \varrho\cos\vartheta$$

$$y = \varrho\sin\vartheta$$

zusammen, aus denen

$$z = x + iy = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \varrho e^{i\vartheta}$$

folgt. Also ist

$$\chi(z) = -\log z = -\log\varrho - i\vartheta;$$

und da die Functionen

$$-\log\varrho = -\log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

und

$$-\vartheta = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

beide reell sind, so ist

$$\varphi = -\log\varrho$$

der reelle Bestandtheil von $\chi(z)$, genügt demnach der Gleichung $\Delta\varphi = 0$. Da es ferner sammt seinen Differentialquotienten im End-

lichen überall endlich und stetig mit Ausnahme des Punktes $x = y = 0$ ist (vergl. § 13), so entspricht es genau der Lösung $\varphi = \frac{1}{r}$ der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ für drei Dimensionen; es stellt die Potentialfunction eines unendlich langen, unendlich dünnen, positiv geladenen Cylinders dar. Die Kraftcomponenten sind

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = +\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} = +\frac{1}{\varrho}\cos\vartheta$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y} = +\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y} = +\frac{1}{\varrho}\sin\vartheta,$$

da

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\vartheta$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\vartheta.$$

ist. Die elektrische Kraft nimmt mit wachsendem Abstand ϱ ab, wie $\frac{1}{\varrho}$. Im Unendlichen wird φ nicht wie bei dreidimensionalen Problemen 0, sondern negativ unendlich.

Dieselbe Function

$$\varphi = -\log\varrho$$

stellt natürlich auch die Potentialfunction im Raume zwischen zwei metallischen, coaxialen Kreiscylindern dar, da auf diesem $\varrho = \text{const}$, also auch $\varphi = \text{const}$ ist.

Statt aber χ als geeignete Function von z zu bestimmen, ist es manchmal einfacher, umgekehrt z als Function von χ aufzusuchen; beides ist gleichwerthig; denn hat der Differentialquotient $\frac{dz}{d\chi}$ einen bestimmten Sinn, so gilt das Gleiche von $\frac{d\chi}{dz}$, ist also z Function des complexen Arguments χ, so ist auch χ Function der complexen Veränderlichen z. Dieser Art ist das Beispiel, auf welches wir nun ein wenig näher eingehen wollen.

Die praktisch wichtigste Form des elektrischen Condensators besteht in zwei einander parallelen, metallischen Kreisscheiben, deren Abstand gegen den Radius klein ist. Man macht sich leicht klar, dafs in den Theilen des Zwischenraumes, an denen ein Einflufs des

Randes der Platten nicht zu merken ist, die Platten also als unendlich ausgedehnt gelten können:

$$\varphi = a y + b$$

(a und b Constante) die Potentialfunction ist, vorausgesetzt, dafs die Plattennormale die y-Richtung hat; denn dann ist $\Delta\varphi = 0$ und an den Platten $y = \text{const}$, also $\varphi = \text{const}$. Wesentlich schwieriger ist die Frage nach dem Einflufs des Randes. Man kann sie aber wenigstens angenähert behandeln, wenn man wegen des vorausgesetzten Verhältnisses zwischen Plattenabstand und Radius von der Krümmung absieht und die Platten als unendlich ausgedehnte Halbebenen betrachtet. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir festsetzen, dafs sie denjenigen Theil der Ebenen

$$y = \pm A\pi$$

ausfüllen sollen, in welchem $x < -A$ ist, obwohl hier der Plattenabstand $2\pi A$ und die Lage der Randlinien ($x = -A$) durch dieselbe Constante A bestimmt sind; denn die letztere Festsetzung giebt nur die relative Lage des Coordinatensystems zu den Condensatorplatten an. Die Platten sollen auf entgegengesetzt gleichen Potentialen sein, welche wir, um nicht noch eine Constante mehr einführen zu müssen, zu $\pm\pi$ festsetzen. Hierfür läfst sich jeder andere Werth erzielen, wenn man die unten angegebene Potentialfunction mit einem passenden Factor multiplicirt.

Diese Aufgabe löst der Ansatz:

$$z = A(\chi + e^{\chi})$$

oder

$$x + iy = A(\varphi + i\psi + e^{\varphi + i\psi}) = A\left(\varphi + i\psi + e^{\varphi}(\cos\psi + i\sin\psi)\right),$$

wenn man ψ als die Potentialfunction betrachtet. Denn wegen

$$\left.\begin{aligned} x &= A(\varphi + e^{\varphi}\cos\psi) \\ y &= A(\psi + e^{\varphi}\sin\psi) \end{aligned}\right\} \tag{186}$$

entspricht den Niveaulinien

$$\psi = \pm\pi$$

der Theil der Geraden

$$y = \pm A\pi,$$

den

$$x = A(\varphi - e^{\varphi}) = A e^{\varphi}(\varphi e^{-\varphi} - 1)$$

durchläuft, wenn φ die Reihe der reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchwandert. Für $\varphi = -\infty$ ist aber $e^{\varphi} = 0$, also $x = -\infty$, für $\varphi = +\infty$ wird $\varphi e^{-\varphi} - 1 = -1$ und $e^{\varphi} = +\infty$, so dafs wiederum $x = -\infty$ wird, während x für $\varphi = 0$ seinen Maximalwerth $-A$ annimmt, da für diesen Werth

$$\frac{dx}{d\varphi} = A(1 - e^{\varphi}) = 0$$

ist. Der fragliche Theil der beiden Geraden ist demnach identisch mit den Schnitten der Platten mit der xy-Ebene.

Dafs die Niveaulinien $\psi = \pm \pi$ auf die angegebene Weise doppelt durchlaufen werden, wird verständlicher, wenn man eine der anderen Niveaulinien discutirt, für welche

$$-\pi < \psi < +\pi$$

ist. Ist φ sehr grofs und negativ, so ist annähernd

$$x = A\varphi, \quad y = A\psi,$$

demnach $-\pi A < y < +\pi A$, so dafs diesen Werthen von φ der vom Rande weit entfernte Theil des Raumes zwischen den Platten entspricht. Dagegen sind für sehr grofse positive Werthe von φ x und Ay je nach dem Zeichen von $\cos\psi$ und $\sin\psi$ positiv oder negativ sehr grofs, während für $\varphi = 0$

$$x = A\cos\psi > -A$$

$$y = A(\psi + \sin\psi)$$

wird. Die Linie $\psi = 0$ fällt mit der x-Axe zusammen. Den Verlauf der Niveau- und Kraftlinien $\psi = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ veranschaulicht Figur 18, und zwar ist die Differenz der Werthe von ψ und φ für benachbarte Niveau- und Kraftlinien stets die gleiche. Man sieht aus ihr, dafs für jeden Punkt x, y ψ in dem angegebenen Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ liegt; andere Werthe entbehren der physikalischen Bedeutung. Längs den Niveaulinien $\psi = \pm\pi$ aber entspricht ein negativer Werth von φ einem Punkt der Innenseite, ein positiver Werth einem Punkt der Aufsenseite.

Das Hauptinteresse beansprucht die Frage nach der Vertheilung der Ladungen. Betrachten wir die positiv geladene Platte, für welche $\psi = +\pi$, $y = +A\pi$ ist; da an ihrer Innenseite die Normale in die negative y-Richtung weist, ist $+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial y}$, an der Aufsen-

seite dagegen $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial y}$ die Flächendichte. Nun ist nach (183) und (186) an dieser Platte

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{A(1-e^{\varphi})},$$

so dafs die Flächendichte gleich

$$\pm\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \pm\frac{1}{4\pi A(1-e^{\varphi})}$$

ist, wo das Vorzeichen + an der Innenseite, — an der Aufsenseite gilt. Da der ersteren ein negativer Werth von φ entspricht, $1-e^{\varphi}$

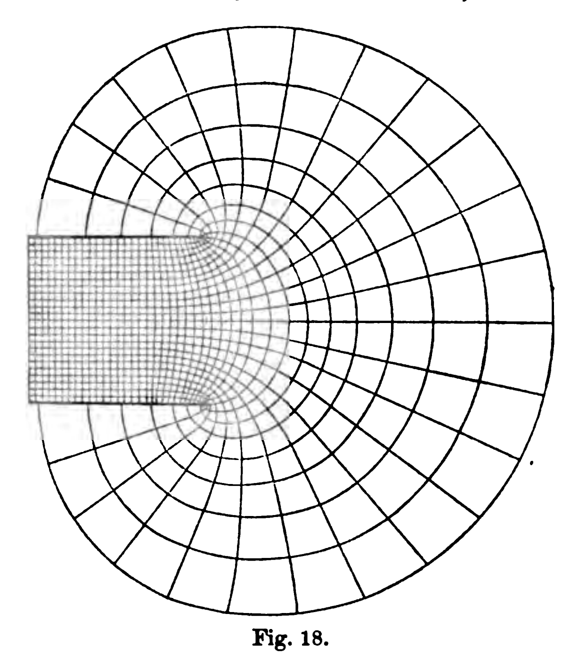


Fig. 18.

dort also positiv ist, während an der letzteren $\varphi > 0$, $1-e^{\varphi} < 0$ ist, so ist das Vorzeichen der Flächenbelegung stets das positive. Die Dichte ist $\frac{1}{4\pi A}$ auf der Innenseite in grofsem Abstande vom Rande, an den entsprechenden Stellen der Aufsenseite aber Null. Dagegen wird sie auf beiden Seiten unendlich grofs, wenn man sich dem Rande nähert.

Eine wichtige Frage ist nun, ob bei der angenommenen Potentialdifferenz 2π zwischen den Platten die Gesammtladung eines endlichen am Rande gelegenen Stückes der Platten endlich ist; denn

andernfalls müfsten wir schliefsen, dafs sich ein Condensator unter Aufwand endlicher Energie überhaupt nicht auf endliche Potentialdifferenz laden läfst. Legen wir einen Streifen der positiv geladenen Platte, welcher in der Richtung des Randes, d. h. senkrecht zur xy-Ebene, die Breite 1 hat, und von der Linie $x = x_0 (x_0 < -A)$ bis zum Rand $x = -A$ reicht, der Betrachtung zu Grunde; er trägt auf der Innenseite die Ladung:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{x_0}^{-A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx,$$

wo von den beiden Werthen von φ, welche einem und demselben Werthe von x angehören, der negative zu nehmen ist, während die Ladung seiner äufseren Seite

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{x_0}^{-A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

beträgt, wo von den beiden in Frage kommenden Werthen von φ der positive eingesetzt werden mufs. Sind φ_0 und φ_0' die beiden zu x_0 gehörenden Werthe, so ist aber das erstere Integral $= -\frac{\varphi_0}{4\pi}$ das zweite $= +\frac{\varphi_0'}{4\pi}$, also beide endlich.

Da in der Figur die Differenz der Werthe von φ auf benachbarten Kraftlinien constant ist, liegt zwischen je zwei Endpunkten von Kraftlinien auf den Platten die gleiche Elektricitätsmenge; sie giebt daher unmittelbar ein Bild der Ladungsvertheilung.

Für den aus zwei kreisförmigen Platten bestehenden Condensator können wir hieraus schliefsen: Jede der Platten trägt nur Ladung eines Vorzeichens, diese liegt überwiegend auf der Innenseite, nur am Rande, wo auch auf der Innenseite die Ladung besonders stark angehäuft ist, ist die Aufsenseite einigermaafsen geladen.

§ 48. Das Energieprincip in der Elektrostatik.

Schon in § 9 [siehe Gleichung (19)] wurde gezeigt, dafs die potentielle Energie einer Anzahl von elektrischen Punktladungen $\mathfrak{e}_i$ gleich $\frac{1}{2}\sum \mathfrak{e}_i \varphi_i$ ist, wenn man unter φ_i den Werth der Potentialfunction aller Punktladungen, mit Ausnahme von $\mathfrak{e}_i$ selbst, am Ort

von e_i versteht. Dies wurde in § 25 auf stetig über räumliche oder flächenhafte Gebiete vertheilte Ladungen übertragen, indem die Energie

$$W = \frac{1}{2}\left(\iiint \varphi\, \varepsilon\, dx\, dy\, dz + \iint ds\, \varphi\, e\right) \tag{187}$$

gesetzt wurde. Dafs hier φ als die Potentialfunction aller Ladungen aufgefafst werden kann, findet, wie dort erwähnt, seine Begründung darin, dafs die Ladungen $\varepsilon\, dx\, dy\, dz$ und $e\, ds$ auch am eigenen Ort nur unendlich wenig zu φ beitragen. In demselben Paragraphen wurde der Ausdruck W auch schon mit Hülfe des GREEN'schen Satzes umgeformt in

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz. \tag{187a}$$

In dem speciellen Fall, dafs nur leitende Körper Träger elektrischer Ladungen sind, ist $\varepsilon = 0$ und (187) reducirt sich auf

$$W = \frac{1}{2}\iint ds\, \varphi\, e = \frac{1}{2}\sum P_i e_i, \tag{187b}$$

wo unter P_i das Potential, unter e_i die gesammte Ladung eines der leitenden Körper zu verstehen ist. Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst an einem Beispiel, dann allgemein beweisen, dafs die aus (187a) oder (187b) berechnete Energie das Aequivalent der Arbeit ist, welche gegen die ponderomotorischen Kräfte geleistet werden mufste, um die Ladungen e_i auf den Conductoren herzustellen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns zunächst eine Punktladung e' einer leitenden Kugel vom Radius R aus dem Unendlichen her genähert, bis ihr Abstand r vom Kugelmittelpunkt gleich r_0 geworden ist; und zwar soll dabei ein dünner Draht die Kugel leitend mit der Erde verbinden, so dafs ihr Potential dauernd 0 bleibt. Dann unterbrechen wir diese Ableitung und entfernen die Punktladung wieder in's Unendliche.

Aus den Erörterungen des § 31 entnehmen wir, dafs die Kugel während der Annäherung eine Ladung $-\frac{R}{r}e'$ trägt, welche nach Aufsen so wirkt, als wäre sie im Spiegelbild des geladenen Punktes concentrirt. In der Endlage $r = r_0$ ist die Ladung

$$e = -\frac{R}{r_0}e', \tag{188}$$

und diese bleibt auf der Kugel, wenn wir nach Unterbrechung der Ableitung e' wieder in's Unendliche fortrücken lassen. Sie vertheilt sich dabei so, daſs ihre Wirkung nach Auſsen der zweier Punktladungen $-\frac{R}{r}e'$ und $-Re'\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$ äquivalent ist, von denen die erstere ihren Sitz wiederum im Spiegelbild des geladenen Punktes, die zweite im Kugelmittelpunkt hat. Beide üben auf e' eine Anziehung aus, welche bei der Entfernung von e' überwunden werden muſs. Die Arbeit, welche die erstere Ladung, $-\frac{R}{r}e'$, erforderlich macht, wurde aber bei der Annäherung von e' gewonnen; die gesammte bei dem Proceſs geleistete Arbeit ist also gleich der, welche zur Ueberwindung der Anziehungskraft

$$-\frac{Re'^2}{r^2}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$$

der im Mittelpunkt concentrirt gedachten Ladung $-Re'\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$ dient; d. h. gleich

$$Re'^2\int_{r_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{2}\frac{Re'^2}{r_0^2}.$$

Da nach (188) im Endzustand das Potential der Kugel

$$P=\frac{e}{R}=-\frac{e'}{r_0}$$

ist, so ist sie in der That gleich $\frac{1}{2}Pe$.

Bevor wir nun zu dem allgemeinen Beweis übergehen, wollen wir zeigen, daſs die Energie W im Gleichgewichtszustande den kleinsten Werth hat, den sie annehmen kann, solange die Lage und Form der Leiter erhalten bleibt und leitende Verbindungen zwischen ihnen und der Erde oder zwischen verschiedenen Conductoren weder neu hergestellt noch unterbrochen werden. Mathematisch formulirt, lautet dies: Verändern wir die Flächendichte der Elektricität e um δe, so daſs die Gesammtladungen e_i der isolirten Conductoren an der Veränderung nicht theilnehmen, so ändert sich die Potentialfunction φ um $\delta\varphi$ und die Energie W und δW. Aber vermöge der Gleichgewichtsbedingungen, daſs überall

$$\Delta\varphi=0,$$

daſs ferner an allen Conductoren

$$\varphi=P_i=\text{const}$$

und speciell auf den zur Erde abgeleiteten

$$P_i = 0$$

ist, ist

$$\delta W = 0\,.$$

Um dies zu zeigen, berechnen wir δW nach (187a), indem wir

$$\delta\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] = 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta \varphi}{\partial x} \text{ etc.}$$

setzen. In der so entstehenden Gleichung

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

ist wie in (187a) über den ganzen Raum, oder da die Differentialquotienten von φ in Leitern verschwinden, über den von Leitern freien Theil des Raumes zu integriren. Wenden wir nun die zum GREEN'schen Satz führende partielle Integration an, so finden wir vermöge $\Delta\varphi = 0$

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi}\iint ds\,\varphi\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\iint ds\,\varphi\,\delta\frac{\partial \varphi}{\partial n}\,,$$

wo das Integral über alle Oberflächen von Conductoren zu erstrecken ist. An diesen ist aber φ constant und nach (69a)

$$-\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial n} = e\,;$$

also ist

$$\delta W = \sum P_i \iint ds_i\,\delta e = \sum P_i\,\delta\,\mathfrak{e}_i = 0\,,$$

da an den isolirten Conductoren $\delta\,\mathfrak{e}_i$, an den zur Erde abgeleiteten aber $P_i = 0$ ist.

Nun denken wir uns alle Ableitungen zur Erde aufgehoben und ertheilen einem der Conductoren, den wir durch den Index 1 auszeichnen, eine unendlich kleine Verschiebung und Drehung, welchen einem seiner Punkte die Verrückung δl mittheilt; Formänderungen schliefsen wir aus. Dann müssen wir gegen die ponderomotorischen Kräfte die Arbeit δA leisten, während sich die Energie um δW ändert. Im Allgemeinen verändert sich mit der Verschiebung auch die Vertheilung der Ladungen auf allen Conductoren und δW besteht dementsprechend aus zwei Summanden, von denen der erste die Veränderung von W in Folge der Verrückung des Conductors

bei unveränderter Vertheilung, der zweite die in Folge der Verschiebung der Ladungen allein stattfindende Veränderung von W angiebt. Der zweite Summand ist aber, wie soeben bewiesen, Null. Denken wir nun die ursprünglich vorhandenen Ableitungen zur Erde wieder hergestellt, so erfolgt eine neue unendlich kleine Verschiebung der Ladungen, welche aber wiederum zu δW nichts beiträgt. Zur Berechnung von

$$\delta W = \tfrac{1}{2} \delta \iint ds\, \varphi\, e \tag{189}$$

haben wir also e als fest an den Flächenelementen ds haftend zu denken.

Dies und die vorausgesetzte Starrheit des Conductors 1 hat zur Folge, dafs die Potentialfunction φ_1 der auf ihm befindlichen Ladung sich in einem an der Verrückung theilnehmenden Punkt nicht ändert; das über seine Oberfläche zu erstreckende Integral

$$\iint_1 ds\, \varphi_1\, e$$

bleibt daher unverändert. Dagegen bleibt die Potentialfunction φ_2 aller anderen Ladungen in allen Punkten unverändert, welche an der Verrückung nicht theilnehmen, also u. A. an den Oberflächen der Conductoren, welche ihren Platz nicht wechseln; das für ihre Oberflächen gebildete Integral

$$\iint_2 ds\, \varphi_2\, e$$

ändert sich also auch nicht, und es wird nach (189) und wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$

$$\left.\begin{aligned} \delta W &= \tfrac{1}{2} \delta \iint ds\, \varphi\, e \\ &= \tfrac{1}{2} \delta \left(\iint_1 ds\, \varphi_1 e + \iint_1 ds\, \varphi_2 e + \iint_2 ds\, \varphi_1 e + \iint_2 ds\, \varphi_2 e \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \delta \left(\iint_1 ds\, \varphi_2 e + \iint_2 ds\, \varphi_1 e \right). \end{aligned}\right\} \tag{189a}$$

Aber auch diese Gleichung läfst sich mit Hülfe des GREEN'schen Satzes noch vereinfachen; denn φ_1 und φ_2 genügen im ganzen Raum der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ und den Stetigkeitsbedingungen,

nur dafs der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ an der Oberfläche des Conductors 1, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ an der der anderen die durch die Relation (69a)

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a}\right) = e$$

gegebene Unstetigkeit besitzt. Das für den ganzen Raum gebildete Integral

$$\iiint\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

ist defshalb sowohl gleich

$$-\iint_2 ds\, \varphi_1\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_a}\right) = 4\pi \iint_2 ds\, \varphi_1\, e,$$

als auch gleich

$$-\iint_1 ds\, \varphi_2\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_a}\right) = 4\pi \iint_1 ds\, \varphi_2\, e.$$

Flächenintegrale für die unendlich ferne Begrenzung des Raumes treten bei beiden Umformungen nicht auf, weil φ_1 und φ_2 im Unendlichen wie $1/R$, ihre Ableitungen wie $1/R^2$ verschwinden. Ganz allgemein gilt demnach

$$\iint_1 ds\, \varphi_2 e = \iint_2 ds\, \varphi_1\, e,$$

so dafs nach (189a)

$$\delta W = \delta \iint_1 ds\, \varphi_2\, e$$

wird. Das hier allein auftretende Integral erfährt seine Veränderung dadurch, dafs ein Flächenelement ds bei der Verschiebung um δl von einem Ort mit dem Werthe φ_2 an einen mit dem Werthe $\varphi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial l}\delta l$ kommt; also ist

$$\delta W = \iint_1 ds\, e\, \frac{\partial \varphi_2}{\partial l}\, \delta l. \tag{189b}$$

Die von den in Ruhe bleibenden Conductoren auf das Element ds des Conductors 1 in der Richtung von δl ausgeübte pondero-

motorische Kraft ist aber

$$-ds\,e\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial l},$$

die zu ihrer Ueberwindung erforderliche Arbeit

$$ds\,e\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial l}\,\delta l,$$

also folgt aus (189b) unmittelbar

$$\delta W = \delta A,$$

was zu beweisen war.

Es werden demnach bei dieser unendlich kleinen Verschiebung elektrische Energie und mechanische Arbeit unmittelbar in einander umgewandelt. Dasselbe gilt von jeder endlichen Verrückung, vorausgesetzt, daſs sie so langsam vor sich geht, daſs sich in jedem Augenblick das elektrostatische Gleichgewicht wieder einstellt; denn sonst fielen die Voraussetzungen unseres Beweises fort. Es entständen dann elektrische Ströme, welche Kräfte auf einander ausüben, die ganz aus dem Bereich der bisherigen Betrachtungen herausfallen, und auſser elektrischer Energie und mechanischer Arbeit träten in der Energiegleichung noch magnetische Energie und JOULE'sche Wärme auf. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so können wir aus der Gleichheit von δW und δA schlieſsen, daſs die aufzuwendende Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage abhängt, auf welchem Wege man auch die eine in die andere überführen mag; denn die Aenderung der elektrischen Energie ist auch vom Wege unabhängig.

Die Verwandlung mechanischer Arbeit in elektrische Energie spielt in der praktischen Physik eine groſse Rolle; die Wirksamkeit aller Influenzmaschinen beruht auf ihr. Beim Elektrophor, der einfachsten derartigen Vorrichtung, z. B. wird der metallische Deckel der elektrisch geladenen isolirenden Scheibe genähert, während er abgeleitet, und dann von ihr entfernt, nachdem er isolirt worden ist. Ganz wie in dem durchgerechneten Beispiel die leitende Kugel erhält er dabei eine Ladung, deren Energie das Aequivalent der Arbeit ist, welche bei der Annäherung und Wiederentfernung geleistet werden muſs.

Zweiter Theil.

Andere Gebiete, in denen sich die Kraft aus einer Potentialfunction ableitet.

Erster Abschnitt.

Magnetisirte Körper und Dielektrica.

---

§ 49. Allgemeine Theorie der permanenten Magnete.

Die Theorie des Magnetismus schliefst sich eng an die Elektrostatik an. Denn ebenso wie die elektrostatischen lassen sich die magnetischen Wirkungen auf zwei entgegengesetzte Agentien zurückführen, deren Unzerstörbarkeit und Unvermehrbarkeit nur der Einschränkung unterliegt, dafs gleich grofse Mengen von positivem und negativem Magnetismus sowohl gleichzeitig entstehen, als verschwinden können; sie addiren sich algebraisch. Und die Anziehungs- oder Abstofsungskraft, welche zwei magnetische Quanta $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ im Abstand r von einander auf einander ausüben, gehorcht demselben Gesetz

$$K = A^2 \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1}{r^2}$$

wie die elektrische Kraft. Auch für die Bestimmung der Einheit des magnetischen Quantums gilt dasselbe, wie für die Definition der Einheit des elektrischen. Da der Magnetismus uns nur durch seine Anziehungs- und Abstofsungskraft bekannt ist, können wir sie durch Wahl der Constante A^2 beliebig festsetzen. Zum Gauss'schen Maafssystem führt die Bestimmung, dafs für das Vacuum oder die ihm praktisch äquivalente atmosphärische Luft $A^2 = 1$ sein soll. Die Einheit des Magnetismus ist dann dasjenige Quantum, welches auf ein gleiches Quantum im Abstand von 1 cm die Kraft 1 Dyn

ausübt; der Dimension nach wird das magnetische Quantum gleich dem elektrischen, d. h.

$$\mathfrak{m} = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Ferner hat die Uebereinstimmung in den Kraftgesetzen zur Folge, dafs man sich zur Beschreibung des magnetischen Kraftfeldes wie in der Elektrostatik zweckmäfsig einer Potentialfunction bedient, deren negativ genommene Differentialquotienten nach den rechtwinkligen Coordinaten die Componenten der auf die Einheit des Magnetismus ausgeübten Kraft angeben. Alle Sätze über den Zusammenhang ihrer Differentialquotienten mit der Raum- und Flächendichte der Ladung lassen sich ohne Weiteres übertragen; speciell gilt im ladungsfreien Raume für sie die Differentialgleichung:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Dennoch tragen die Gleichungen des statischen magnetischen Feldes ein ganz anderes Gepräge, als die der Elektrostatik. Denn zwischen beiden Gebieten besteht der grundlegende Unterschied, dafs wir die entgegengesetzten magnetischen Quanten nicht wie die elektrischen beliebig weit von einander trennen können; jeder Körper enthält vielmehr genau ebensoviel positiven wie negativen Magnetismus; auch die weitgehendste Zertheilung eines Magneten liefert immer nur Stücke, welche selbst vollständige Magnete mit der Gesammtladung Null sind. Es giebt keinen Körper, in welchem der Magnetismus so frei beweglich wäre, wie die Elektricität in einer leitenden Substanz. Dies zwingt uns zu der Vorstellung, dafs die Beweglichkeit, welche wir dem Magnetismus zuschreiben müssen — andernfalls würden sie sich in einem Anfangs nicht magnetisirten Körper dauernd neutralisiren — nicht über molekulare Entfernungen hinausreicht, dafs also schon jede Molekel ein vollständiger Magnet mit der Gesammtladung Null ist.

Entsprechen so alle magnetisirbaren Körper den Dielektriken, so giebt es doch auch bedeutsame Unterschiede zwischen ihnen. Dafs manche Körper, die sogenannten diamagnetischen, weniger magnetisirbar sind, als der leere Raum, wurde schon in der Einleitung erwähnt; das elektrische Analogon hierzu fehlt. Erheblicher noch ist es, dafs es Substanzen giebt, welche die einmal angenommene Magnetisirung dauernd behalten, während die elektrische Polarisation eines Dielektrikums, wenn auch nicht immer gleichzeitig mit ihrer Ursache, so doch bald nach ihr aufhört; der gehärtete Stahl ist der Typus einer der permanenten Magnetisirung fähigen Substanz. Die

Theorie dieser permanenten Magnete ist es, die wir zuerst besprechen wollen; von allen temporär magnetisirbaren Körpern nehmen wir deshalb vorläufig an, daſs sie sich in praktisch unendlich groſser Entfernung befinden.

Wir beginnen mit der Aufstellung der Potentialfunction eines magnetischen Dipols; denn dieser spielt in der Lehre vom Magnetismus als das einfachste Modell der magnetisirten Molekel dieselbe grundlegende Rolle, wie in der Elektrostatik die Punktladung. Er besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Punktladungen $\pm \mathfrak{m}$, von denen die negative die Coordinaten x, y, z, die positive die Coordinaten $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ hat; seine Potentialfunction ist die Summe der Potentialfunctionen dieser Punktladungen. Versteht man unter r die Entfernung des Punktes x, y, z vom Punkte ξ, η, ζ, so ist sie im letzteren

$$\varphi = -\frac{\mathfrak{m}}{r_{x, y, z}} + \frac{\mathfrak{m}}{r_{x+dx,\, y+dy,\, z+dz}},$$

oder wenn man den zweiten Term gleich

$$\mathfrak{m}\left(\frac{1}{r_{x,y,z}} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dz\right)$$

setzt,

$$\varphi = \mathfrak{m}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right).$$

Die Gröſsen

$$\mathfrak{m}\, dx = \lambda, \qquad \mathfrak{m}\, dy = \mu, \qquad \mathfrak{m}\, dz = \nu$$

lassen sich hier als die Componenten eines Vectors auffassen, dessen Gröſse man durch Multiplication von $\mathfrak{m}$ mit dem Abstand dl der Punktladungen findet und der in der Richtung mit dl zusammenfällt; man nennt ihn das Moment $\mathfrak{M}$ des Dipols. Die Potentialfunction bestimmt sich aus ihm nach der Formel

$$\varphi = \lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \tag{190}$$

oder, da

$$\lambda = \mathfrak{M} \cos(x, dl), \qquad \mu = \mathfrak{M} \cos(y, dl), \qquad \nu = \mathfrak{M} \cos(z, dl)$$

und

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(x, dl) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(y, dl) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(z, dl)$$

$$= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dz}{dl} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial l},$$

$$\varphi = \mathfrak{M} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial l}; \tag{190a}$$

setzt man andererseits in (190):

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cos(r, x)$$

etc. (r ist dabei als vom Punkte ξ, η, ζ nach dem Punkte x, y, z weisend angenommen, sonst erhielte $\cos(r, x)$ etc. das entgegengesetzte Vorzeichen), so folgt

$$\varphi = -\frac{1}{r^2} [\lambda \cos(r, x) + \mu \cos(r, y) + \nu \cos(r, z)]. \tag{190 b}$$

Liegen mehrere Dipole so nahe bei einander, daſs die Differentialquotienten $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$ für alle denselben Werth haben, so erhält man ihre Potentialfunction, wenn man in (190) λ durch $\Sigma \lambda$ etc. ersetzt. Diese Voraussetzung ist nun von den Molekeln erfüllt, welche in einem Volumelement $dx\,dy\,dz$ eines permanenten Magneten liegen; auch dies wirkt nach Auſsen wie ein einzelner Dipol. Durch Integration über das Volumen der Magnete findet man hieraus seine Potentialfunction. Nun sind aber nach der bisherigen Definition die Momentcomponenten λ, μ, ν in den Molekeln von Null verschieden, in den Zwischenräumen aber Null, also unregelmäſsig und sprungweise sich ändernde Functionen des Ortes, deren Beibehaltung nicht nur zu groſsen analytischen Schwierigkeiten führen würde, sondern auch schon aus dem Grunde unmöglich wäre, weil man ja nie die Vertheilung der Molekeln und das Moment einer einzelnen beobachten kann. Beobachtbar ist nur die vectorielle Summe der Momente vieler Molekeln; da im homogenen Körper nah

benachbarte Volumelemente gleichberechtigt sind, so ist diese zu dem Volumelement, über dessen Molekeln wir summiren, proportional, d. h. wir können ihre Componente gleich $\lambda\, dx\, dy\, dz$, $\mu\, dx\, dy\, dz$, $\nu\, dx\, dy\, dz$ setzen. In dieser neuen Bedeutung sind λ, μ, ν die Componenten eines als Magnetisirung bezeichneten Vectors σ, sie sind stetige und differenzirbare Functionen des Ortes, abgesehen von Unstetigkeitsflächen, wie z. B. die Oberfläche eines permanenten Magneten eine ist. Die Potentialfunction eines Volumelements ist dann

$$\left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

und die des ganzen Magneten

$$\varphi = \iiint \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \tag{191}$$

Diese Gleichung läſst sich nach dem zum Beweis des GREEN'schen Satzes (§ 21) benutzten Schema durch partielle Integration umformen; nehmen wir an, daſs im Inneren des Magneten keine Unstetigkeitsfläche liegt, daſs er also nicht aus verschiedenen, erst nach der Magnetisirung zusammengefügten Stücken besteht, so ist seine Oberfläche die einzige Unstetigkeitsfläche und es bezieht sich in der so entstehenden Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \varphi = &-\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &-\overline{\iint} \frac{ds}{r}\left[\lambda \cos(n_i, x) + \mu \cos(n_i, y) + \nu \cos(n_i, z)\right] \end{aligned}\right\} \tag{191a}$$

das Flächenintegral nur auf diese. Im Allgemeinen müſste es über alle Unstetigkeitsflächen so gebildet werden, daſs die Magnetisirung der beiden an einander stoſsenden Körper berücksichtigt wird. Das Auftreten des Factors $\frac{1}{r}$ zeigt, daſs der Magnet äquivalent ist einer magnetischen Ladung von der räumlichen Dichte

$$\mu' = -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^{1)} \tag{192}$$

[1]) μ', die Raumdichte der, wie wir später sagen werden, scheinbaren magnetischen Ladung darf nicht mit μ, der y-Componente der Magnetisirung verwechselt werden.

und der Flächendichte

$$m' = -[\lambda \cos(n_i x) + \mu \cos(n_i y) + \nu (\cos n_i z)] = -\sigma_{n_i}, \quad (192\text{a})$$

wenn σ_{n_i} die Componente des Vectors σ in Richtung der inneren Normale bedeutet; diese Bezeichnungsweise wollen wir im Folgenden zur Abkürzung der Formeln beibehalten. Der Gesammtbetrag dieser Ladung für den ganzen Magneten ist Null, da nach dem GAUSS'schen Satz

$$\iiint \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = -\overline{\iint} ds\, \sigma_{n_i}$$

ist; für einen Theil des Magneten ist er aber natürlich im Allgemeinen von Null verschieden, doch wird er beim Zerbrechen des Magneten für jedes Stück wieder Null, weil dann die Bruchfläche einen vorher nicht auftretenden Beitrag zum Oberflächenintegral der letzten Gleichung liefert. Wegen dieses Unterschiedes gegen das Verhalten der elektrischen Ladungen, die wir bisher kennen gelernt haben, bezeichnet man die letzteren als wahre, die ersteren aber als scheinbare, d. h. durch die Magnetisirung vorgetäuschte Ladungen. Nach (191a) spielen die scheinbaren Ladungen aber für die Potentialfunction dieselbe Rolle, wie die wahren Ladungen der Elektrostatik, d. h. es bestehen nach (69) und (69a) die Beziehungen:

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi = \mu' = -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) \quad (193)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a}\right) = m' = -\sigma_{n_i}, \quad (193\text{a})$$

welche sich, da die Componenten der magnetischen Kraft

$$L = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sind, auch in die Form

$$\frac{\partial (L + 4\pi\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial (M + 4\pi\mu)}{\partial y} + \frac{\partial (N + 4\pi\nu)}{\partial z} = 0, \quad (193\text{b})$$

$$\left.\begin{aligned}(L_i + 4\pi\lambda_i)\cos(n_i, x) + (M_i + 4\pi\mu_i)\cos(n_i, y) + (N_i + 4\pi\nu_i)\cos(n_i, z)\\ + L_a \cos(n_a, x) + M_a \cos(n_a, y) + N_a \cos(n_a, z) = 0\end{aligned}\right\} \quad (193\text{c})$$

bringen lassen. In der letzten Gleichung könnte man zu L_a, M_a, N_a noch $4\pi\lambda_a$, $4\pi\mu_a$, $4\pi\nu_a$ hinzuaddiren, da diese drei Terme Null

sind. Nun sahen wir in § 24, dafs die Einheitsfäden, welche das elektrische Kraftfeld darstellen, nur dort Endpunkte haben, wo elektrische Ladungen liegen, wo also entweder die räumliche Divergenz der elektrischen Kraft,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varepsilon$$

oder die Flächendivergenz

$$X_i \cos(n_i x) + Y_i \cos(n_i y) + Z_i \cos(n_i z) \\ + X_a \cos(n_a x) + Y_a \cos(n_a y) + Z_a \cos(n_a z) = 4\pi e\ .$$

von Null verschieden ist. Nach (193 b) und (193 c) sind aber räumliche und Flächendivergenz des Vectors mit den Componenten $L + 4\pi\lambda$, $M + 4\pi\mu$, $N + 4\pi\nu$ stets Null, die den Verlauf dieses Vectors darstellenden Einheitsröhren laufen also immer in sich selbst zurück.

Nach (191) ist die Potentialfunction und damit das den Magneten umgebende Kraftfeld durch die Magnetisirung eindeutig bestimmt. Dagegen ist es nicht möglich, umgekehrt aus der Kenntnifs des Kraftfeldes im Aufsenraum die Magnetisirung zu ermitteln. Nicht einmal auf die Vertheilung der scheinbaren Ladung läfst sich zurückschliefsen. Denn es giebt zu jeder räumlichen Ladung mit der Dichte μ' im Inneren eine Oberflächenbelegung, welche ihre Wirkung nach Aufsen gerade aufhebt; nach (89 a) ist:

$$\varphi = \iiint U \mu' \, dx\, dy\, dz$$

U ist die Green'sche Function) die Potentialfunction, welche im Inneren der Forderung

$$\Delta\varphi = -4\pi\mu'$$

genügt und im Aufsenraume 0 ist;

$$m' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}$$

ist also die Dichte jener Oberflächenbelegung. Der Gesammtbetrag dieser Ladung ist

$$\iiint \mu' \, dx\, dy\, dz + \iint ds\, m' \\ = -\frac{1}{4\pi}\iiint \Delta\varphi \, dx\, dy\, dz - \frac{1}{4\pi}\iint ds \frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = 0$$

(nach dem GAUSS'schen Satze); sie kann also bei einem Magneten auftreten, der dann nach Aufsen überhaupt nicht wirkt. Fügt man sie zu einer schon vorhandenen Ladung hinzu, so ist dies aufserhalb des Magneten nicht zu bemerken. Aber selbst wenn

$$\mu' = -\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right)$$

und

$$m' = -\sigma_{n_i}$$

bekannt wäre, so reichte dies noch nicht zur Bestimmung der Magnetisirungscomponenten λ, μ, ν hin. Die elektrische Feldstärke ist zwar eindeutig bestimmt, wenn ihr aufser der Divergenz $-\mu'$ in einem geschlossenen Raume vorgeschrieben ist, dafs sie aufserhalb dieses Raumes Null sein soll. Die Gleichung

$$\varphi = \iiint U \mu' \, dx \, dy \, dz$$

giebt nach (89a) ihre Potentialfunction an. Die Magnetisirung leitet sich aber nicht aus einer Potentialfunction ab, vielmehr können die sie darstellenden „Magnetisirungslinien" alle in sich geschlossen sein, so dafs ihre Divergenz $\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}$ ebenso wie die Flächendivergenz σ_{n_i} verschwindet. Sie veranlafst dann nach (191a) weder innerhalb noch aufserhalb des Magneten eine magnetische Kraft, und ihr Hinzufügen zu einer anderen schon vorhandenen Magnetisirung läfst sich durch Untersuchung des Kraftfeldes nicht erkennen.

Wie sich beim Zerbrechen eines Magneten seine scheinbare Ladung ändert, so auch, wenn man in ihn einen Hohlraum bohrt; denn auch dabei entstehen neue Grenzflächen. In dem Hohlraume wird also im Allgemeinen eine andere Feldstärke herrschen, als vorher an dem entsprechenden Platze. Wir wollen diese Frage nur für den einfachsten Fall behandeln, dafs das ausgebohrte Volumen so klein ist, dafs man in ihm die Magnetisirung als nach Gröfse und Richtung constant betrachten kann, und dafs es die Form eines Cylinders hat, dessen Erzeugenden in der Richtung der Magnetisirung liegen. Wir legen die x-Axe parallel zu dieser Richtung.

Wir verfahren zu diesem Zwecke so, dafs wir von der Potentialfunction φ des ursprünglichen Magneten die des ausgebohrten Cylinders abziehen. Zu ihrer Berechnung brauchen wir weder die Volumenladung des Cylinders zu berücksichtigen — denn sie äufsert

nach § 11 auf die Kraft keinen endlichen Einfluſs, wenn der Cylinder unendlich klein ist — noch den Cylindermantel, da an ihm $\sigma_{n_i} = 0$ ist. Nach (191 a) ist sie also

$$\varphi^* = -\iint \frac{ds}{r}\sigma_{n_i} = -\sigma\left(\iint_1 \frac{ds}{r} - \iint_2 \frac{ds}{r}\right),$$

wo die erste Integration über die dem kleineren Werthe von x entsprechende Grundfläche, die zweite über die dem gröſseren Werthe von x entsprechende auszuführen ist. Ist der Cylinder fadenförmig lang gestreckt, so wird das magnetische Quantum $\sigma\iint ds$ so klein, daſs beide Integrale und damit φ^* nur in der nächsten Umgebung der beiden Flächen von Null verschieden sind. Im entgegengesetzten Grenzfalle eines äuſserst flachen, scheibenförmigen Cylinders ist φ^* die Potentialfunction zweier unendlichen, entgegengesetzt gleich mit der Flächendichte σ geladenen Ebenen, wenn man die Betrachtung auf solche Punkte beschränkt, welche vom Mantel des Cylinders genügend entfernt sind. In Uebereinstimmung mit §§ 19 und 47 sieht man unmittelbar, daſs der Ansatz

$$\varphi^* = 4\pi\sigma x + \text{const} \quad \text{im Innern des Cylinders}$$
$$\varphi^* = \text{const} \quad \text{im Auſsenraum}$$

sowohl der Gleichung $\Delta\varphi^* = 0$ als den Grenzbedingungen an den geladenen Platten

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial n_2}\right) = \mp\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x} = \mp\sigma$$

genügt. Die im Hohlraum herrschende Potentialfunction ist also

$$\varphi - \varphi^* = \varphi - 4\pi\sigma x - \text{const},$$

so daſs die x-Componente der magnetischen Kraft im Hohlraum um $4\pi\sigma$ gröſser ist, als an derselben Stelle, bevor er gebohrt war.

Bei anderer Form des Hohlraumes findet man andere Werthe für diesen Zusatz.

§ 50. Angenäherte Darstellung des Kraftfeldes in der Umgebung eines Magneten.

Setzt man in (191 a) das magnetische Quantum $-\sigma_{n_i} ds$ oder

$$-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\nu}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

gleich $d\mathfrak{m}$, so geht diese Gleichung über in

$$\varphi = \int \frac{d\mathfrak{m}}{r},$$

wo r den Abstand des Quantums $d\mathfrak{m}$ vom Punkt ξ, η, ζ, also

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}}$$

ist. Wir verlegen nun den Coordinatenanfang in's Innere des Magneten. Die Entwickelung der Function $\frac{1}{r}$ nach steigenden Potenzen von x, y, z

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)_0 z\right] + \ldots \tag{194}$$

convergirt für alle Punkte ξ, η, ζ, für welche

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > x^2 + y^2 + z^2,$$

ist, und zwar um so schneller, je größer $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ist.

Diese TAYLOR'sche Reihe ist nämlich ihrem Inhalt nach gleichbedeutend mit der früher abgeleiteten Gleichung (159c) auf S. 199. Wir brauchen dort nur R_1 und R_2 mit den beiden Strahlen zu identificiren, welche hier vom Nullpunkt nach den beiden Punkten x, y, z und ξ, η, ζ führen. Dann wird der Cosinus des Winkels zwischen beiden Strahlen — das ist die Variabele μ der Kugelfunctionen $P_{\mathfrak{a},0}$ —

$$\mu = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R_1 R_2}.$$

Die Kugelfunction $P_{\mathfrak{a},0}$ ist ganze Function $\mathfrak{a}$ten Grades von μ mit entweder nur geraden oder nur ungeraden Potenzen. Sie kann daher umgeformt werden in einen Bruch, dessen Generalnenner $R_1^{\mathfrak{a}} R_2^{\mathfrak{a}}$ heißt, während im Zähler wegen $R_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$ eine ganze Function $\mathfrak{a}$ten Grades der drei Variabelen x, y, z auftritt, deren Coefficienten aus den ξ, η, ζ zusammengesetzt werden. Nennen wir diese ganze Function $G_{\mathfrak{a}}(x, y, z)$, so heißt das allgemeine Glied der Reihe (159c), nachdem man noch den Factor R_2 von links nach rechts in den Nenner gebracht hat,

$$\frac{R_1^{\mathfrak{a}}}{R_2^{\mathfrak{a}+1}} \cdot \frac{G_{\mathfrak{a}}(x, y, z)}{R_1^{\mathfrak{a}} R_2^{\mathfrak{a}}} = \frac{1}{R_2^{2\mathfrak{a}+1}} G_{\mathfrak{a}}(x, y, z).$$

Die ganze Schaar der hieraus entstehenden Glieder kann man nach steigenden Potenzen und Producten von x, y, z ordnen und erhält somit eine Entwickelung von $1/r$, welche mit der hier in Gleichung (194) angesetzten Reihe identisch sein mufs. Da nun jene Reihe für $R_2 > R_1$ absolut convergirt, so thut das auch unsere Reihe (194).

Die Reihe, die man durch Substitution von (194) in $\varphi = \int \frac{d\mathfrak{m}}{r}$ erhält, lautet wegen $\int d\mathfrak{m} = 0$

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0 \int x\,d\mathfrak{m} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)_0 \int y\,d\mathfrak{m} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)_0 \int z\,d\mathfrak{m}\\ &+ \frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)_0 \int x^2 d\mathfrak{m} + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\right)_0 \int y^2 d\mathfrak{m} + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)_0 \int z^2 d\mathfrak{m}\right.\\ &+ \left. 2\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\right)_0 \int xy\,d\mathfrak{m} + 2\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\right)_0 \int yz\,d\mathfrak{m} + 2\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\right)_0 \int zx\,d\mathfrak{m}\right\}\\ &+ \frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0 \int x^3 d\mathfrak{m} + \ldots\right\}\\ &+ \ldots\end{aligned}\right\} \quad (195)$$

und convergirt aufserhalb einer Kugel um den Coordinatenanfang, welche den Magneten gerade eben einschliefst.

Der Vergleich von (194) und (190) zeigt, dafs der Magnet, soweit hier nur die Glieder erster Ordnung in Betracht kommen, einem Dipol äquivalent ist, dessen Moment $\mathfrak{M}$ die Componenten $\int x\,d\mathfrak{m}$, $\int y\,d\mathfrak{m}$ und $\int z\,d\mathfrak{m}$ hat. Man nennt $\mathfrak{M}$ das Moment des Magneten. Es ist von der Wahl des Coordinatenanfangs unabhängig, denn eine Parallelverschiebung des Axenkreuzes verändert die Coordinaten nur um gewisse additive Constanten a, b, c, so dafs an die Stelle des Integrals $\int x\,d\mathfrak{m}$

$$\int (a + x)\,d\mathfrak{m} = \int x\,d\mathfrak{m} \text{ etc.}$$

tritt. Dagegen verändert eine Drehung des Axenkreuzes die Werthe der drei Componenten. Legen wir z. B. — das ist das Zweck-

mäſsigste, weil sich dann (195) wesentlich vereinfacht — die x-Axe in die Richtung des Moments $\mathfrak{M}$, so wird

$$\int x\,d\mathfrak{m} = \mathfrak{M}, \quad \int y\,d\mathfrak{m} = \int z\,d\mathfrak{m} = 0 \tag{196}$$

und die Potentialfunction reducirt sich in den Gliedern erster Ordnung auf den zu (190a) analogen Ausdruck

$$\varphi = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0.$$

Natürlich kann auch $\mathfrak{M}$ gleich Null sein, z. B. wenn man zwei Magnete von gleichem Moment so auf einander legt, daſs ihre Momente entgegengesetzte Richtungen erhalten. Dann wird die Bestimmung der Lage der x-Axe hinfällig, doch schlieſsen wir diesen Fall hier von der Betrachtung aus.

Wir wollen nun des Weiteren die Lage des Axenkreuzes so wählen, daſs Gleichung (195) auch in den Gliedern zweiter Ordnung eine möglichst einfache Gestalt annimmt. Zunächst setzt eine Parallelverschiebung an die Stelle von $\int x^2\,d\mathfrak{m}$, $\int xy\,d\mathfrak{m}$ und $\int xz\,d\mathfrak{m}$ die Integrale

$$\int (a+x)^2\,d\mathfrak{m} = a^2\int d\mathfrak{m} + 2a\int x\,d\mathfrak{m} + \int x^2\,d\mathfrak{m}$$

$$\int (a+x)(b+y)\,d\mathfrak{m} = ab\int d\mathfrak{m} + a\int y\,d\mathfrak{m} + b\int x\,d\mathfrak{m} + \int xy\,d\mathfrak{m}$$

$$\int (a+x)(c+z)\,d\mathfrak{m} = ac\int d\mathfrak{m} + a\int z\,d\mathfrak{m} + c\int x\,d\mathfrak{m} + \int xz\,d\mathfrak{m},$$

welche sich nach (196) und wegen $\int d\mathfrak{m} = 0$ auf

$$2a\,\mathfrak{M} + \int x^2\,d\mathfrak{m},$$

$$b\,\mathfrak{M} + \int xy\,d\mathfrak{m},$$

$$c\,\mathfrak{M} + \int xz\,d\mathfrak{m}$$

reduciren. Wir bestimmen nun die Constanten a, b, c so, daſs diese drei Ausdrücke verschwinden. Dadurch ist der Coordinatenanfang in den

sogenannten Mittelpunkt des Magneten verlegt und es sind in (195) die Coefficienten von $\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}\right)_0$ zum Verschwinden gebracht.

Jetzt hat unser Coordinatensystem nur noch einen Freiheitsgrad, die Drehung um die x-Axe. Drehen wir es um den Winkel α, so treten an die Stelle von y und z die neuen Coordinaten

$$y' = \quad y \cos\alpha + z \sin\alpha$$
$$z' = -y \sin\alpha + z \cos\alpha$$

und es wird das an die Stelle von $\int y z \, d\mathfrak{m}$ tretende Integral

$$\int y' z' \, d\mathfrak{m} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \int (z^2 - y^2)\, d\mathfrak{m} + \cos 2\alpha \int y z \, d\mathfrak{m}.$$

Durch passende Wahl von α läfst sich also auch der Coefficient von $\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}\right)_0$ in (195) zu Null machen, so dafs von den Gliedern zweiter Ordnung nur übrig bleibt

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\right)_0 \int y^2 \, d\mathfrak{m} + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)_0 \int z^2 \, d\mathfrak{m}\right].$$

Dafür ist aber jetzt auch das Coordinatensystem vollkommen festgelegt.

Doch auch diese Glieder verschwinden häufig; z. B. wenn der Magnet zu seiner Mittelebene (der y-z-Ebene unseres Axenkreuzes) symmetrisch und so magnetisirt ist, dafs jeder Ladung $d\mathfrak{m}$ im Punkt x, y, z die Ladung $-d\mathfrak{m}$ im Punkt $-x, y, z$ entspricht. Aber auch wenn diese Forderung nicht streng erfüllt ist, kann man in dem praktisch wichtigsten Fall des stabförmigen Magneten die das Quadrat der Querdimensionen enthaltenden Integrale $\int y^2 \, d\mathfrak{m}$ und $\int z^2 \, d\mathfrak{m}$ vernachlässigen.

Unter derselben Voraussetzung kommt für viele Zwecke von den Gliedern dritter Ordnung nur das allein von den Längsdimensionen abhängige,

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0 \int x^3 d\mathfrak{m},$$

in Betracht; innerhalb der Grenzen dieser Annäherung ist also

$$\varphi = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0 \int x^3 d\mathfrak{m} \tag{195a}$$

Denken wir uns andererseits in zwei Punkten der x-Axe, welche vom Nullpunkt die Entfernungen $\pm \frac{l}{2}$ haben, zwei magnetische Quanten $\pm \mathfrak{m}$ angebracht und wählen $\mathfrak{m}$ und l so, dafs

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}\, l &= \mathfrak{M} \\ \mathfrak{m}\, l^3 &= 4\int x^3 d\mathfrak{m} \end{aligned}\right\} \tag{195b}$$

wird. Die Potentialfunction dieser Punktladungen wird dann, wenn wir mit r_+ und r_- den Abstand der beiden Punktladungen vom Punkt ξ, η, ζ bezeichnen und nach (194)

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0 l + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)_0 l^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0 l^3 + \dots$$

$$\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0 l + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)_0 l^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0 l^3 - \dots$$

setzen, gleich

$$\mathfrak{m}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \mathfrak{m}\, l\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{24}\,\mathfrak{m}\, l^3\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0 + \dots,$$

stimmt also innerhalb der in (195a) erreichten Annäherung nach (195b) mit der des Magneten überein. Die Orte dieser Punktladungen bezeichnet man als die Pole des Magneten; ihre Entfernung von einander, welche nach (195b) den Betrag

$$l = 2\sqrt{\frac{\int x^3 d\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}}}$$

hat, ist erfahrungsgemäfs meist $\frac{5}{6}$ der Stablänge. Ihre Bedeutung unterliegt aber denselben Einschränkungen wie die Gültigkeit der Gleichung (195a). In Strenge läfst sich der Magnet nicht durch sie ersetzen.

Setzt man in (195a) nach (195b)

$$\int x^3\, d\mathfrak{m} = \tfrac{1}{4}\,\mathfrak{M}\, l^2$$

und drückt man die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right)_0$ in den Coordinaten des Punktes ξ, η, ζ aus, so findet man

$$\varphi = \frac{\xi}{r^3}\left[1 - \frac{1}{8}\frac{l^2}{r^2}\left(3 - 5\frac{\xi^2}{r^2}\right)\right]\mathfrak{M}, \tag{195c}$$

wo

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2};$$

hieraus berechnen sich die Kraftcomponenten

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{1}{r^3}\left[\left(1 - 3\frac{\xi^2}{r^2}\right) - \frac{1}{8}\frac{l^2}{r^2}\left(3 - 30\frac{\xi^2}{r^2} + 35\frac{\xi^4}{r^4}\right)\right]\mathfrak{M} \\ M &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\xi\eta}{r^5}\left[3 - \frac{5}{8}\frac{l^2}{r^2}\left(1 - 7\frac{\xi^2}{r^2}\right)\right]\mathfrak{M} \\ N &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{\xi\zeta}{r^5}\left[3 - \frac{5}{8}\frac{l^2}{r^2}\left(1 - 7\cdot\frac{\xi^2}{r^2}\right)\right]\mathfrak{M}. \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

In erster Annäherung, d. h. sofern der Magnet als Dipol ($l = 0$) betrachtet werden kann, ist

$$\left.\begin{aligned} L &= 3\,\mathfrak{M}\frac{\xi^2}{r^5} - \frac{\mathfrak{M}}{r^3} \\ M &= 3\,\mathfrak{M}\frac{\xi\eta}{r^5} \\ N &= 3\,\mathfrak{M}\frac{\xi\zeta}{r^5}. \end{aligned}\right\} \tag{197a}$$

Es superponiren sich in grofser Entfernung vom Magneten also zwei Kräfte, von denen die eine von der Stärke $\frac{\mathfrak{M}}{r^3}$ die dem Moment entgegengesetzte Richtung hat, während die andere die Intensität $3\,\mathfrak{M}\frac{|\xi|}{r^4}$ besitzt und je nach dem Vorzeichen von ξ vom Mittelpunkt der

Magneten fort oder nach ihm hinweist. Für spätere Zwecke führen wir hier noch die Kraft an, welche einerseits in der Mittelebene der Magnete ($\xi = 0$), andererseits in seiner Axe ($\eta = \zeta = 0$) herrscht; nach (197) ist in Punkten der ersteren

$$L = -\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{l^2}{r^2}\right), \qquad M = 0, \qquad N = 0 \qquad (197\text{b})$$

in Punkten der letzteren

$$L = 2\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{l^2}{r^2}\right), \qquad M = 0, \qquad N = 0. \qquad (197\text{c})$$

§ 51. Das magnetische Kraftfeld der Erde und seine Messung.

Eng verknüpft mit dem magnetischen Moment ist das Drehmoment, welches der Magnet im homogenen Kraftfeld erfährt. Als ein solches ist z. B. das des Erdmagnetismus zu betrachten; denn es verändert sich in dem von experimentell brauchbaren Magnetstäben eingenommenen Raum nicht merklich. Hängen wir den Stab um eine vertikale Axe drehbar so auf, dafs seine magnetische Axe in der horizontalen x-y-Ebene liegt und mit der x-Axe, die wir in die Richtung der Horizontalcomponente T der erdmagnetischen Kraft legen, den Winkel α bildet, so erleidet er das Drehungsmoment

$$-T\int y\,d\mathfrak{m} = -T\mathfrak{M}\sin\alpha$$

(siehe Band I dieser Vorlesungen, § 46), denn $T d\mathfrak{m}$ ist die am Ort von $d\mathfrak{m}$ angreifende und in der x-Richtung wirkende Kraft, und $\int y\,d\mathfrak{m}$ die y-Componente des magnetischen Moments $\mathfrak{M}$. Der Magnet bleibt in Ruhe, wenn $\alpha = 0$, wenn also seine magnetische Axe mit der Richtung von T zusammenfällt. Dies dient zur Definition des Vorzeichens einer magnetischen Ladung; als positiv bezeichnet man die Ladung des Poles, welcher in unseren Breiten ungefähr nach dem geographischen Nordpol weist.

Ist R das Trägheitsmoment des Stabes, so erfährt er die Winkelbeschleunigung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{T\mathfrak{M}}{R}\sin\alpha.$$

Dies ist aber die in Band I dieser Vorlesungen § 28 ausführlich discutirte Differentialgleichung der Pendelschwingungen. Wir ent-

nehmen jener Besprechung das Resultat, daſs der Stab Schwingungen um die Ruhelage $\alpha = 0$ ausführt, deren Periode bei kleiner Amplitude

$$\mathfrak{T} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{T\mathfrak{M}}} \tag{197d}$$

ist. Das Reibungsglied, welches in der Differentialgleichung wegen des Luftwiderstandes und anderer Störungen eigentlich hinzugefügt werden müſste, ändert nichts daran, da es sehr klein ist und nach Band I § 32 nur quadratisch in die Formel für die Periode eingeht.

Gleichung (197d) setzt uns in den Stand, die Horizontalintensitäten an verschiedenen Orten der Erdoberfläche mit einander zu vergleichen, indem man die Schwingungsdauer desselben Magneten an ihnen bestimmt; es ist dann

$$T_1 : T_2 : T_3 \ldots = \frac{1}{\mathfrak{T}_1^{\,2}} : \frac{1}{\mathfrak{T}_2^{\,2}} : \frac{1}{\mathfrak{T}_3^{\,2}} \cdots .$$

Dies älteste, auf Humboldt zurückzuführende Verfahren leidet aber an der Ungenauigkeit, daſs sich ein Magnet nicht unverändert über gröſsere Strecken transportiren läſst; und da die erdmagnetische Kraft an einem und demselben Ort zeitlich nicht genau constant ist, kann man auch durch Controllversuche nach Rückkehr zur Ausgangsstation diesen Fehler nicht eliminiren — ganz abgesehen davon, daſs er für T keinen absoluten Werth liefert. Von beiden Uebelständen ist die Gauss'sche Methode frei, da sie über das Moment des Magneten nichts voraussetzt, sondern es im Gegentheil jedesmal mitbestimmt.

Gleichung (197d) enthält das Product $T\mathfrak{M}$, aber auſserdem noch das Trägheitsmoment R. Man eliminirt das Letztere durch Anstellung eines zweiten Versuchs mit demselben Magnetstab, nur daſs zuvor das Trägheitsmoment in berechenbarer Weise verändert wird. Dazu sind auf dem Magnetstab zwei Messingringe von gleicher Masse p verschiebbar angebracht. Ihre Schwerpunkte befinden sich das erste Mal im Abstand a_1, das zweite Mal im Abstand a_2 von der Drehungsaxe. Ist ϱ das Trägheitsmoment eines Ringes um seinen Schwerpunkt, so ist bei dem ersten Versuch das Trägheitsmoment der Ringe um die Drehungsaxe nach einem bekannten Satz der Mechanik (Band I dieser Vorlesungen, p. 173 ff.).

$$2(\varrho + p\,a_1^{\,2}),$$

beim zweiten Versuch

$$2(\varrho + p a_2^2);$$

um

$$2p(a_2^2 - a_1^2)$$

wird demnach das Trägheitsmoment durch die Verschiebung geändert, so dafs beim zweiten Versuch die Periode der Schwingung

$$\mathfrak{T}' = 2\pi\sqrt{\frac{R + 2p(a_2^2 - a_1^2)}{T\mathfrak{M}}}$$

ist. Hieraus und aus (197d) kann man nach Elimination von R das Product $T\mathfrak{M}$ berechnen.

Nun kann man aber auch das Verhältnifs $\frac{T}{\mathfrak{M}}$ bestimmen, indem man eine horizontal aufgehängte Magnetnadel zugleich der Wirkung des Erdfeldes und des Magneten aussetzt. Wir wollen sie als so klein voraussetzen, dafs auch die von dem letzteren ausgehende Kraft längs ihrer Ausdehnung als constant betrachtet werden kann; dann giebt die Richtung ihrer magnetischen Axe in der Ruhelage die Richtung der Resultante aus den Horizontalcomponenten der von der Erde und dem Magneten ausgeübten Kräfte. Legt man nun den Magnet in die Entfernung r nordwärts (längs des magnetischen Meridians gemessen) von ihr, mit von Osten nach Westen gerichteter Axe, so rührt von ihm nach (197b) am Ort der Nadel die von Westen nach Osten weisende Kraft

$$\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}\right)$$

her. Ist α der Winkel, um welchen die Nadel durch sie aus dem magnetischen Meridian abgelenkt wird, so ist $\operatorname{tg}\alpha$ gleich ihrem Verhältnifs zu T, also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}\right)\frac{\mathfrak{M}}{T}.$$

Führt man die Messung für zwei verschiedene Entfernungen r aus, so kann man unter Elimination des unbekannten Polabstandes l das Verhältnifs $\frac{T}{\mathfrak{M}}$, und da das Product $T\mathfrak{M}$ schon bekannt ist, T und $\mathfrak{M}$ einzeln im absoluten Maafs bestimmen. Natürlich kann man den Magneten auch östlich oder westlich von der Nadel mit von Osten

nach Westen weisender Axe aufstellen, dann gilt nach (197c) für den Ablenkungswinkel α die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{r^3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}\right)\frac{\mathfrak{M}}{T}.$$

Diese Erörterungen enthalten natürlich nur den Grundgedanken der Gauss'schen Methode. Bei der Ausführung der Versuche bedarf es einer viel größeren Anzahl von Messungen, um z. B. die Unsicherheit über den Ort des Mittelpunktes und die Lage der Axe des Magneten, die die Messung des Abstandes r beeinträchtigt, eventuell auch den Einfluſs des Polabstandes der abgelenkten Magnetnadel und Aehnliches zu eliminiren.

Historisch sei erwähnt, daſs Gauss an derartigen Ablenkungsversuchen bestätigte, daſs die magnetische Kraft einer Punktladung dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist, indem er sie unter Voraussetzung des allgemeineren Kraftgesetzes

$$K = \frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1}{r^n}$$

discutirte und zeigte, daſs sich die Beobachtungen nur mit der Annahme $n = 2$ erklären lassen.

Nicht nur ein theoretisches, sondern auch ein erhebliches praktisches (nautisches) Interesse hat die Frage, wie man aus der Bestimmung der Gröſse und Richtung der Horizontalintensität an einer Anzahl von Beobachtungsstationen den Verlauf der Kraftlinien an der ganzen Erdoberfläche finden kann. Zu diesem Zweck benutzen wir die Darstellung der Potentialfunction durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe. Dabei denken wir die Erde als Kugel vom Radius R; mit η bezeichnen wir die geographische Länge, mit ϑ die Poldistanz vom Nordpol und mit μ ihren Cosinus; nach (150) gilt dann längs der Erdoberfläche

$$\overline{\varphi} = \sum_{\mathfrak{n}=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{n}} P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}} (A_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cos \mathfrak{m}\,\eta + B_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sin \mathfrak{m}\,\eta).$$

Im Gegensatz zu (150) brauchen wir hier nur von $\mathfrak{n} = 1$ an zu summiren; denn das dort auftretende Glied mit $\mathfrak{n} = 0$ erhält den Factor $\frac{1}{r}$, wenn man die Function φ für einen Punkt auſserhalb der Kugel berechnet, deutet also auf eine von Null verschiedene magnetische Gesammtladung hin, die nicht vorkommen kann. Eine

Verschiebung des Punktes η, ϑ längs des geographischen Meridians, welche die Poldistanz um $d\vartheta$ ändert, ist gleich $R\,d\vartheta$; die Potentialfunction ändert sich dabei um

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{R} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \vartheta} \cdot R\,d\vartheta;$$

der Factor der Verschiebung $R\,d\vartheta$ muſs aber, negativ genommen, die in Richtung von $d\vartheta$ liegende Kraftcomponente Θ sein; also ist

$$\Theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \vartheta} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{R} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}.$$

Die Verschiebung des Punktes ϑ, η längs des Breitenkreises beträgt $R \sin\vartheta\, d\eta$, wenn η dabei um $d\eta$ wächst. Wir schlieſsen daraus, daſs

$$H = -\frac{1}{R\sin\vartheta} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \eta} = \frac{-1}{R\sqrt{1-\mu^2}} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \eta}$$

die in Richtung des Breitenkreises wirkende Componente der erdmagnetischen Kraft ist. Führt man in der Reihe für $\overline{\varphi}$ diese Differentiationen aus, so erhält man, da

$$\frac{d P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}}}{d\mu} = P_{\mathfrak{n}\mathfrak{m}+1}$$

ist,

$$\Theta = \frac{1}{R} \sum_{\mathfrak{n}=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{n}} \left(P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}+1} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}+1} - \mathfrak{m}\,\mu\, P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}-1} \right) \cdot (A_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cos \mathfrak{m}\eta + B_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sin \mathfrak{m}\eta)$$

$$H = \frac{1}{R} \sum_{\mathfrak{n}=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}=0}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{m}\, P_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sqrt{1-\mu^2}^{\,\mathfrak{m}-1} (A_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \sin \mathfrak{m}\eta - B_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \cos \mathfrak{m}\eta).$$

Berücksichtigt man hier nur eine endliche Anzahl von Gliedern, so kann man aus der Kenntniſs von Θ und H an der gleichen Anzahl von Beobachtungsstationen ihre Coefficienten $A_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ und $B_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}$ bestimmen. Dies führt natürlich auf weitläufige Eliminationsrechnungen.

Die Glieder, für welche $\mathfrak{n} = 1$ ist, ergeben für die Potentialfunction auſserhalb der Erde den Term

$$\frac{R^3}{r^2} (A_{10} \cos\vartheta + A_{11} \sin\vartheta \cos\eta + B_{11} \sin\vartheta \sin\eta);$$

in hinreichend groſser Entfernung überwiegt er die anderen, welche wie $\frac{1}{r^3}$ etc. abnehmen. Wie aus dem Vergleich mit (190b) hervor-

geht, stellt er die Potentialfunction eines Dipols dar, dessen Moment die Componenten $R^3 A_{10}$, $R^3 A_{11}$, $R^3 B_{11}$ hat; denn es ist

$$-\cos(r, x) = \cos\vartheta, \quad -\cos(r, y) = \sin\vartheta\cos\eta, \quad -\cos(r, z) = \sin\vartheta\sin\eta.$$

Nach Gauss ist sein Werth so grofs, wie wenn sich in jedem Kubikmeter der Erde acht maximal magnetisirte einpfündige Magnetstäbe alle zu einander parallel befänden. Ueber die thatsächliche Magnetisirung soll damit natürlich nichts gesagt sein; diese läfst sich bei der Erde ebenso wenig wie bei jedem anderen Magneten durch Bestimmung des umgebenden Kraftfeldes ermitteln.

§ 52. Allgemeine Theorie der Dielektrica und temporär magnetischen Körper.

Im Anschlufs an die Theorie der permanenten Magnete ist es ein Leichtes, auch die dielektrisch und magnetisch erregbaren Körper in den Kreis der Betrachtung zu ziehen; denn die grundlegenden Begriffe sind trotz der verschiedenen Benennungen in diesen Gebieten der Theorie defswegen die gleichen, weil die Elektricität in den Dielektriken ebenso nur innerhalb der Molekeln beweglich ist, wie der Magnetismus. Definiren wir den als dielektrische Polarisation bezeichneten Vector s mit den Componenten l, m, n dahin, dafs $l\,dx\,dy\,dz$, $m\,dx\,dy\,dz$, $n\,dx\,dy\,dz$ die Componenten des resultirenden elektrischen Moments aller im Volumelement $dx\,dy\,dz$ liegenden Molekeln ist, so ist entsprechend der Gleichung (191)

$$\varphi = \iiint \left(l \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz \qquad (198)$$

die Potentialfunction der vom Dielektricum ausgehenden elektrischen Kräfte. Wir können also das Folgende, obwohl wir durchgängig von Dielektriken reden wollen, unmittelbar auf magnetisirbare Körper übertragen; wo sachliche Unterschiede vorliegen, werden wir sie besonders hervorheben.

Die Componenten l, m, n der Polarisation sind wie die Magnetisirungscomponenten λ, μ, ν stetige und differenzirbare Functionen des Ortes, nur an den Berührungsflächen verschiedener Körper sind sie im Allgemeinen unstetig. Nehmen wir in (198) die von (191) zu (191a) führende partielle Integration vor, so müssen wir im Gegensatz zu dem Früheren die Möglichkeit in's Auge fassen, dafs auf

beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche Polarisation vorhanden ist. Dann findet man an Stelle von (191 a) die Gleichung:

$$\varphi = -\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right) dx dy dz - \iint \frac{ds}{r}(s_{n_1} + s_{n_2}). \quad (198\,\text{a})$$

Die Polarisation des Dielektricums täuscht also eine Ladung von der Raum- und Flächendichte

$$\varepsilon'' = -\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right)$$

$$e'' = -(s_{n_1} + s_{n_2})$$

vor. Man bezeichnet sie wie die entsprechende Ladung eines Magneten als scheinbare Ladung. Daneben kann aber noch eine wirkliche Ladung bestehen; die älteste Erfahrung auf dem Gebiete der Elektricität ist ja die, dafs sich zwei in innige Berührung gebrachte (geriebene) Isolatoren entgegengesetzt laden. Sie erhalten dabei eine Flächenbelegung. Diese als zugeleitete oder wahre Elektricität bezeichnete Ladung kann aber auch in das Innere dringen und sich dort räumlich vertheilen; denn es giebt keine scharfe Trennung zwischen Isolatoren und leitenden Körpern. Auch bei Substanzen, in denen die Elektricität für die Dauer eines Versuchs so gut wie fest haftet, kann im Lauf längerer Zeit Verrückung der Ladung vorkommen. Ist ε und e die Raum- und Flächendichte der wahren Ladung, so ist ihre Potentialfunction natürlich gleich

$$\iiint \frac{\varepsilon}{r} dx dy dz + \iint ds \frac{e}{r},$$

so dafs im Allgemeinen

$$\varphi = \iiint \frac{1}{r}\left[\varepsilon - \left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right)\right] dx dy dz + \iint \frac{ds}{r}\left[e - (s_{n_1} + s_{n_2})\right] \quad (199)$$

wird. Die hier auftretende Summe aus der wahren und der scheinbaren Ladung bezeichnet man als die freie Ladung. Ihre Raum- und Flächendichte ist

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= \varepsilon - \left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right), \\ e' &= e - (s_{n_1} + s_{n_2}). \end{aligned}\right\} \quad (200)$$

Sie bestimmt die Potentialfunction so, wie es die wahre Ladung thut, wenn polarisirbare Körper nicht vorhanden sind.

Unmittelbar aus der letzten Bemerkung folgt die Gültigkeit der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = s' \\ -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right) &= \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_{n_1}+\mathfrak{E}_{n_2}) = e'. \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

Die Normalcomponente der elektrischen Kraft springt also im Allgemeinen an Unstetigkeitsflächen; dagegen sind nach (199) die Tangentialcomponenten immer stetig; denn sprungweise Aenderung der letzteren lernten wir nur an Doppelflächen von wechselndem Moment (§ 19, Ende) kennen. Aus (200) und (201) folgt, dafs

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial(X+4\pi l)}{\partial x}+\frac{\partial(Y+4\pi m)}{\partial y}+\frac{\partial(Z+4\pi n)}{\partial z}\right] = s \\ &\frac{1}{4\pi}[(\mathfrak{E}_{n_1}+4\pi s_{n_1})+(\mathfrak{E}_{n_2}+4\pi s_{n_2})] = e \end{aligned}\right\} \qquad (201\,\text{a})$$

ist. Der Vector, dessen Componenten $X+4\pi l$, $Y+4\pi m$, $Z+4\pi n$ sind, hängt also mit der wahren Ladung genau so zusammen, wie die elektrische Kraft mit den freien.

Beim Magnetismus giebt es keine wahre Ladung, wie wir schon in § 49 aussprachen; daher ist freier Magnetismus identisch mit dem scheinbaren und es verschwindet, wie ebenfalls dort bemerkt wurde, die Divergenz des Vectors mit den Componenten $L+4\pi\lambda$, $M+4\pi\mu$, $N+4\pi\nu$ überall, auch an Unstetigkeitsflächen.

Der Punkt, in welchem sich die Dielektrica und temporär magnetisirbaren Körper von den permanenten Magneten wesentlich unterscheiden, ist nun der, dafs die ersteren einer äufseren Ursache bedürfen, um Polarisation oder Magnetisirung zu zeigen. Es besteht bei ihnen ein Zusammenhang zwischen der elektrischen oder magnetischen Erregung und der Feldstärke, welchen wir im Folgenden — natürlich unter Benutzung empirischer Thatsachen — ableiten wollen.

Befindet sich ein elektrischer Dipol, dessen Ladungen $-\mathfrak{e}$ und $+\mathfrak{e}$ an den Orten x, y, z und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ liegen, in einem fremden elektrischen Kraftfelde, dessen Potentialfunction φ ist, so ist

$$\mathfrak{e}(\varphi_{x+dx,\,y+dy,\,z+dz}-\varphi_{x,y,z}) = \mathfrak{e}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)$$

die potentielle Energie der auf ihn ausgeübten Kraft. $\mathfrak{e}\,dx$, $\mathfrak{e}\,dy$, $\mathfrak{e}\,dz$ sind die Componenten seines elektrischen Momentes. Schliefst man

in der in § 49 durchgeführten Art vom Dipol auf das System von Dipolen, als welches wir den polarisirten Körper auffassen, so ist

$$\iiint \left(l\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} + n\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

die potentielle Energie seiner Wechselwirkung mit dem Kraftfelde. Aber auch an sich besitzt ein polarisirter Körper Energie; wir setzen ihre Dichte, welche natürlich nur Function der Polarisation s sein kann, gleich $F(s)$. Ferner fanden wir in § 25 für die Energie eines elektrischen Feldes im Vacuum:

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}\left(\iiint \varphi\,\varepsilon\,dx\,dy\,dz + \iint ds\,\varphi\,e\right)$$

und

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) dx\,dy\,dz,$$

zwei äquivalente Gleichungen, aus denen unmittelbar die neue

$$\mathfrak{W} = \iiint \left[\varphi\,\varepsilon - \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right] dx\,dy\,dz + \iint ds\,\varphi\,e$$

folgt. Auf Dielektriken können wir natürlich keine dieser drei Gleichungen ohne Weiteres übertragen, sie würden auch alle drei verschiedene Werthe für $\mathfrak{W}$ liefern; es ist vielmehr eine nur durch den Vergleich mit der Erfahrung zu beweisende Behauptung, dafs man die Energie richtig berechnet, wenn man zu dem letzten Ausdruck den soeben gedeuteten Summanden

$$\iiint \left[\left(l\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} + n\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + F(s)\right] dx\,dy\,dz$$

hinzufügt; so entsteht die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W} = \iiint \Big[\varphi\,\varepsilon &+ \left(l\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} + n\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + F(s) \\ &- \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)\Big] dx\,dy\,dz + \iint ds\,\varphi\,e. \end{aligned}\right\} \quad (202)$$

Aus dem Energieprincip folgt, dafs ein Zustand, in welchem die potentielle Energie ein Minimum ist, ein Gleichgewichtszustand ist. Denn zu einer Aenderung ist dann eine Vermehrung der Energie

nothwendig, welche nicht ohne einen Eingriff von Aufsen in das System hineingelangen kann. Erfahrungsgemäfs giebt es nur einen Gleichgewichtszustand im elektrischen Felde, also mufs in ihm $\mathfrak{W}$ seinen kleinsten Werth haben, d. h. es mufs $\delta\mathfrak{W} = 0$ sein, wenn man die Polarisationscomponenten l, m, n variirt. Dabei sind die von der Polarisation unabhängigen wahren Ladungen, d. h. ε und e, als constant zu betrachten, dagegen nicht die Potentialfunction φ, welche ja nach (200) und (201) von der Polarisation abhängt. Nun hat aber die Gleichung (202) die bemerkenswerthe Eigenschaft, dafs, wenn man φ allein variirt, nach (201) und (200)

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{W} &= \iiint \varepsilon\,\delta\varphi\,dx\,dy\,dz + \iint ds\, e\,\delta\varphi \\ &\quad + \iiint\Big[l\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial x} + m\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial y} + n\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial z} \\ &\qquad - \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial z}\Big)\Big]\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint\Big[\varepsilon - \Big(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\Big) + \frac{1}{4\pi}\,\Delta\varphi\Big]\,\delta\varphi\,dx\,dy\,dz \\ &\quad + \iint\Big[e - (s_{n_1} + s_{n_2}) + \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\Big)\Big]\,\delta\varphi\,ds = 0\end{aligned}$$

ist. Variirt man also l, m, n um unendlich kleine Gröfsen, so kann man zur Berechnung von $\delta\mathfrak{W}$ auch φ als constant betrachten und findet so

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{W} = \iiint\Big\{&\delta l\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{dF}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial l}\Big) + \delta m\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{dF}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial m}\Big) \\ &+ \delta n\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{dF}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial n}\Big)\Big\}\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur dann für alle möglichen Functionen, welche man für δl, δm, δn wählen kann, wenn die Coefficienten von δl, δm, δn einzeln verschwinden, d. h. wenn

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= +\frac{dF}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial l} = \frac{dF}{ds}\,\frac{l}{s} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{dF}{ds}\,\frac{m}{s} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{dF}{ds}\,\frac{n}{s}\end{aligned}$$

ist. Denn aus $s^2 = l^2 + m^2 + n^2$ folgt $\frac{\partial s}{\partial l} = \frac{l}{s}$ etc.

Diese Gleichungen enthalten den gesuchten Zusammenhang zwischen der Polarisation und der Feldstärke, wenn die Function $F(s)$ bekannt ist. Die Erfahrung zeigt nun, dafs sie für kleine Werthe von s zu s^2 proportional ist. Für grofse Werthe wächst sie freilich bedeutend schneller, bis die obere Grenze für s erreicht ist. Bei magnetisirbaren Körpern ist diese durch den sogenannten Sättigungswerth gegeben, über den keine noch so bedeutende Vergröfserung der Feldstärke die Magnetisirung hinaus bringt; im Gebiet der Elektricität aber wird jeder Körper bei genügend hoher Feldstärke leitend, und es treten Erscheinungen auf, die sich dem Rahmen der vorgetragenen Theorie nicht mehr anpassen lassen. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Ansatz

$$F(s) = \frac{s^2}{2k}$$

und haben dann

$$\left.\begin{aligned} l &= -k\frac{\partial \varphi}{\partial x} = kX \\ m &= -k\frac{\partial \varphi}{\partial y} = kY \\ n &= -k\frac{\partial \varphi}{\partial z} = kZ, \end{aligned}\right\} \qquad (203)$$

und analog für einen magnetisirbaren Körper

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\varkappa\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varkappa L \\ \mu &= -\varkappa\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varkappa M \\ \nu &= -\varkappa\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varkappa N \end{aligned}\right\} \qquad (203\,\mathrm{a})$$

zu setzen. k und $\varkappa$, die Dielektrisirungs- und die Magnetisirungszahl, sind die Substanz charakterisirende Constanten von der Dimension einer reinen Zahl, da nach (201 a) und (193 b) X und l, L und λ von derselben Dimension sind. k ist stets positiv, $\varkappa$ kann auch — bei den diamagnetischen Körpern — negativ sein. Sehr grofse positive Werthe erreicht $\varkappa$ in den Metallen der Eisengruppe, vor allem im Eisen selbst. Doch treten bei diesen die Sättigungserscheinungen und die Coercitivkraft so hervor, dafs die vorgetragene Theorie nur in roher Annäherung für sie Gültigkeit beanspruchen kann.

Mit Hülfe von (203) folgt aus (201a) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big((1+4\pi k)X\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big((1+4\pi k)Y\Big)\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial z}\Big((1+4\pi k)Z\Big)\right]=\varepsilon,\\&\text{welche im homogenen Körper übergeht in}\\&\frac{1+4\pi k}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=-\frac{1+4\pi k}{4\pi}\Delta\varphi=\varepsilon,\\&\text{während an Unstetigkeitsflächen}\\&\frac{1}{4\pi}[(1+4\pi k_1)\mathfrak{E}_{n_1}+(1+4\pi k_2)\mathfrak{E}_{n_2}]\\&\qquad=-\frac{1}{4\pi}\left[(1+4\pi k_1)\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+(1+4\pi k_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right]=e\end{aligned}\right\}\quad(204)$$

gilt. Zieht man die Gleichung (201) zum Vergleich heran, so sieht man hieraus, dafs im homogenen Dielektricum nur dort freie Ladung sitzt, wo sich auch wahre befindet, und zwar ist das Verhältnifs ihrer Dichten

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=\frac{1}{1+4\pi k}.$$

Wo die Constante k ihren Werth stetig oder sprunghaft ändert, treten hingegen freie Ladungen unabhängig von wahren auf; denn im Allgemeinen ist:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon'&=\frac{1}{1+4\pi k}\left[\varepsilon-\left(X\frac{\partial k}{\partial x}+Y\frac{\partial k}{\partial y}+Z\frac{\partial k}{\partial z}\right)\right]\\e'&=\frac{1}{1+4\pi k_2}[e+\mathfrak{E}_{n_1}(k_2-k_1)]=\frac{1}{1+4\pi k_1}[e+\mathfrak{E}_{n_2}(k_1-k_2)].\end{aligned}\right\}\quad(205)$$

Ferner folgt aus (204), dafs die Richtung der elektrischen Kraft an Unstetigkeitsflächen eine sprungweise Aenderung oder, anders ausgedrückt, die Kraftlinie eine Brechung erleidet, deren Gesetze wir für von wahrer Ladung freie Oberflächen jetzt aufstellen wollen. Die x-Axe legen wir zu diesem Zweck senkrecht zu dem zu betrachtenden Flächenelement. Die Stetigkeit der Tangentialcomponenten drückt sich dann aus in den Gleichungen:

$$Y_1=Y_2,\qquad Z_1=Z_2;$$

dreht man das Coordinatenkreuz um die x-Axe so, dafs Z_1 verschwindet, so gilt dies auch von Z_2; auf beiden Seiten der Fläche

liegt dann die Kraftlinie in der xy-Ebene, d. h. wenn man die Begriffe der Einfalls- und Brechungsebene aus der Optik übernimmt: Die Einfalls- und die Brechungsebene der Kraftlinie fallen zusammen. Der Einfalls- und der Brechungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 sind nun aber durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{Y_1}{X_1}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{Y_2}{X_2}$$

bestimmt und nach (204) ist, da $\mathfrak{E}_{n_1} = - X_1$, $\mathfrak{E}_{n_2} = X_2$,

$$(1 + 4 \pi k_1) X_1 - (1 + 4 \pi k_2) X_2 = 0;$$

also

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 : \operatorname{tg} \vartheta_1 = (1 + 4 \pi k_2) : (1 + 4 \pi k_1). \tag{206}$$

Die in diesen Gleichungen auftretende Körperconstante $1 + 4 \pi k$ nennt man die Dielektricitätsconstante, während die entsprechende magnetische Gröfse $1 + 4 \pi \varkappa$ als magnetische Permeabilität bezeichnet wird. Die Tangenten des Einfalls- und Brechungswinkels verhalten sich also wie die Dielektricitätsconstanten, resp. wie die Permeabilitäten.

Läfst man die Constante k eines homogenen Körpers über alle Grenzen wachsen, so mufs nach (204) für sein Inneres

$$\varepsilon' = - \frac{1}{4 \pi} \varDelta \varphi$$

und an seiner Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n_i}$ zu Null abnehmen, so dafs auch das das über Volumen erstreckte Integral [siehe Gleichung (83)]

$$\iiint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) dx\, dy\, dz$$
$$= - \iint ds\, \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} - \iiint \varphi \varDelta \varphi\, dx\, dy\, dz$$

verschwindet. Daraus folgt aber die für leitende Körper charakteristische Gleichung

$$\varphi = \text{const.}$$

Ein leitender Körper läfst sich also in elektrostatischen Rechnungen als Dielectrikum mit unendlich grofsem k behandeln. Darin liegt aber keineswegs eine Erkenntnifs über die Natur des elektrischen Leitvermögens, vielmehr würde diese für die Elektrostatik gültige Rechnungsregel auf anderen Gebieten der Elektricitätslehre zu

falschen Resultaten führen. Auch ist die auf einem Leiter im elektrischen Feld influenzirte Flächenbelegung eine wahre Ladung, während auf einem Dielektricum durch Influenz nur scheinbare Ladung hervorgerufen werden kann.

Auf diesen Umstand und die Analogie zwischen elektrischen und magnetischen statischen Erscheinungen ist es zurückzuführen, dafs stark magnetisirbare Substanzen, d. h. solche, bei denen $\varkappa$ grofs ist, Hohlräume in ihrem Inneren ähnlich, wenngleich nie vollkommen, gegen magnetische Störungen schützen, wie Leiter elektrostatische Einflüsse abschirmen.

§ 53. Kugel und Ellipsoid aus magnetisirbarer Substanz im homogenen Feld.

Ein homogenes magnetisches Feld, d. h. ein solches, in welchem die Kraft nach Richtung und Gröfse constant ist, wird durch eine in den Coordinaten lineare Potentialfunction dargestellt; bei geeigneter Wahl der x-Richtung also durch

$$\varphi = A\,\xi\,,$$

wo A eine Constante ist. Bringen wir die Kugel vom Radius R hinein, so superponirt sich hierzu die Potentialfunction der auf ihr influenzirten scheinbaren Ladung; wir wollen zeigen, dafs wir die Constanten B und C so wählen können, dafs der Ansatz

$$\varphi_a = A\,\xi + B\,\frac{\xi}{r^3} \quad \text{aufserhalb der Kugel}$$

$$\varphi_i = C\,\xi \qquad\qquad \text{innerhalb der Kugel}$$

das Problem löst. Dabei soll der Anfangspunkt des Coordinatensystems im Kugelmittelpunkt liegen, und

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

sein. Die Forderungen, denen wir zu genügen haben, sind:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ im ganzen Raum,}$$

$$\varphi \text{ an der Kugelfläche stetig,}$$

$$(1 + 4\pi k_a)\frac{\partial\varphi_a}{\partial r} - (1 + 4\pi k_i)\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} = 0 \text{ an der Kugelfläche;}$$

denn diese soll keine wahre Ladung tragen [siehe (204)].

Der ersten dieser Bedingungen ist durch die Functionen ξ und

$$\frac{\xi}{r^3} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$$

genügt, also auch durch φ_a und φ_i unabhängig von den Constanten B und C. Dagegen giebt die zweite eine Bestimmung für diese, nämlich

$$\frac{\varphi_a}{\xi} = A + \frac{B}{R^3} = \frac{\varphi_i}{\xi} = C;$$

und bringt man unseren Ansatz in die Form

$$\varphi_a = \left(A r + \frac{B}{r^2}\right) \cos(r, x)$$

$$\varphi_i = C r \cos(r, x),$$

so sieht man, dafs die dritte Bedingung

$$(1 + 4\pi \varkappa_a)\left(A + \frac{2B}{R^3}\right) = (1 + 4\pi \varkappa_i)\, C$$

verlangt. Es mufs demnach

$$B = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\varkappa_a - \varkappa_i}{1 + \frac{8\pi}{3}\varkappa_a + \frac{4\pi}{3}\varkappa_i} A$$

$$C = \frac{1 + 4\pi\varkappa_a}{1 + \frac{8\pi}{3}\varkappa_a + \frac{4\pi}{3}\varkappa_i} A$$

gewählt werden.

Verstehen wir unter r nicht wie bisher den Abstand $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ vom Mittelpunkt der Kugel, sondern die Entfernung

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

so kann man dem von der Kugel herrührenden Antheil in φ_a, nämlich $B\left(\frac{\xi}{r^3}\right)$, die Form

$$B\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_{x=0,\ y=0,\ z=0}$$

geben. Der Vergleich mit (190a) lehrt dann, dafs die Kugel in ihrer Wirkung nach Aufsen einem Dipol vom Moment B äquivalent

ist; letzteres nimmt proportional mit dem Volumen $\frac{4\pi}{3}R^3$ der Kugel zu. Ist sie stärker magnetisirbar als ihre Umgebung ($\varkappa_i > \varkappa_a$), so ist $\frac{B}{A} < 0$, das Moment hat dann dieselbe Richtung wie die erregende magnetische Kraft $L = -A$; ferner ist dann

$$1 + 4\pi\varkappa_a < 1 + \frac{8\pi}{3}\varkappa_a + \frac{4\pi}{3}\varkappa_i,$$

also $|C| < |A|$; d. h. das Feld im Inneren ist schwächer als das ursprüngliche. Ist hingegen $\varkappa_a > \varkappa_i$, so gilt das Gegentheil. Lassen wir $\varkappa_i$ über alle Grenzen wachsen, so wird

$$B = -R^3 A, \quad C = 0;$$

$$\varphi_a = A\xi\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad \varphi_i = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen zeigt, dafs man, wie nach der Schlufsbemerkung in § 52 zu erwarten ist, durch diesen Grenzübergang die Frage nach dem Gleichgewicht der Elektricität auf einer leitenden, in ein ursprünglich homogenes Feld gebrachten Kugel beantwortet.

Gelten die Gleichungen (203) für das Material, aus dem die Kugel besteht, nicht, so ist das Verhältnifs $\varkappa_i$ von Magnetisirung und Feldstärke im Gegensatz zu unserer Annahme eine Function der letzteren, bei remanentem Magnetismus nicht einmal eine eindeutige. Trotzdem bleibt unsere Lösung gültig; denn wir brauchen nur räumliche Constanz von $\varkappa_i$ vorauszusetzen, und diese ist hier vorhanden, weil in der Kugel das Feld homogen ist.

Um die entsprechende Aufgabe für das Rotationsellipsoid zu ösen, dessen Rotationsaxe, welche die längere der beiden Axen des Ellipsoids sein soll, in der Richtung des ursprünglich homogenen magnetischen Feldes liegt, stellen wir zunächst aus § 45a das Erforderliche über elliptische Coordinaten zusammen. Der Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu ihnen geschieht durch die Substitutionen [vgl. Gleichung (176a)]:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a\sigma\tau \\ \eta &= a\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\tau^2)}\cos\vartheta \\ \zeta &= a\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\tau^2)}\sin\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad (207)$$

aus denen man durch Elimination von je zwei der Coordinaten σ, τ, ϑ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi^2}{a^2\sigma^2} + \frac{\eta^2+\zeta^2}{a^2(\sigma^2-1)} &= 1 \\ \frac{\xi^2}{a^2\tau^2} - \frac{\eta^2+\zeta^2}{a^2(1-\tau^2)} &= 1 \\ \operatorname{tg}\vartheta &= \frac{\zeta}{\eta} \end{aligned}\right\} \qquad (207\,\mathrm{a})$$

hervorgehen. Die Flächen $\sigma = \mathrm{const} > 1$ sind also Ellipsoide, deren numerische Excentrität $\frac{1}{\sigma}$ ist; $\tau = \mathrm{const}$, und zwar $-1 < \tau < +1$, ist die Gleichung eines zweischaligen Hyperboloids, dessen beide Hälften der ersten der Gleichungen (207) zufolge durch das verschiedene Vorzeichen von τ unterschieden sind; und $\vartheta = \mathrm{const}$ $(0 < \vartheta < 2\pi)$ giebt eine durch die x-Axe gehende Ebene an. Andere Werthe von σ, τ, ϑ als die in den angegebenen Bereichen liegenden zuzulasen, hat keinen Zweck, da man dabei keine anderen Flächen findet, als die schon angeführten. Die Oberfläche des magnetisirten Ellipsoids soll durch den Werth $\sigma = \sigma'$ ausgezeichnet sein.

Ganz wie bei der Kugel wollen wir zeigen, dafs wir durch geeignete Wahl der Constanten B und C den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a &= A\sigma\tau + B\left(2 - \sigma\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\tau \quad \text{aufserhalb des Ellipsoids } \sigma = \sigma' \\ \varphi_i &= C\sigma\tau \qquad\qquad \text{innerhalb des Ellipsoids } \sigma = \sigma' \end{aligned}\right\} \qquad (208)$$

den Grenzbedingungen anpassen können.

$$A\sigma\tau = \frac{A}{a}\xi$$

ist hier die Potentialfunction des erregenden Feldes, während $B\left(2 - \sigma\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)\tau$ den Antheil des Ellipsoides an dem äufseren Felde mifst. Dafs der letztere Ansatz der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ genügt, ist schon in § 45a gezeigt worden. Denn Gleichung (178b) läfst sich ohne Weiteres in die Form kleiden:

$$-\chi = \frac{\tau}{2}\left(2 - \sigma\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right).$$

Von den Grenzbedingungen fordert die eine die Stetigkeit von φ, d. h. es mufs an der Fläche $\sigma = \sigma'$

$$\frac{\varphi_a}{\sigma' \tau} = A + B\left(\frac{2}{\sigma'} - \log \frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1}\right) = \frac{\varphi_i}{\sigma' \tau} = C \qquad (209)$$

sein. Die andere sagt aus, dafs die Grenze keine wahre Ladung trägt, d. h. dafs

$$(1 + 4\pi \varkappa_a) \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} - (1 + 4\pi \varkappa_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0, \qquad (209\text{a})$$

wo n beide Mal als vom Innern des Ellipsoids in's Aeufsere weisend angenommen ist. Um $\frac{\partial \varphi_a}{\partial n}$ und $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$ zu berechnen zeigen wir zunächst, dafs

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{\partial n}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial n}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial n}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial \vartheta} = \frac{\partial n}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial n}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} = 0$$

ist. Dies zeigt sich, wenn man hier die sich aus (207) und (207a) ergebenden Werthe der auftretenden Differentialquotienten einsetzt; es ist nämlich

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} = \frac{\frac{\xi}{\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{\sigma^4} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{(\sigma^2 - 1)^2}}} = \tau \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \eta} = \frac{\frac{\eta}{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{\sigma^4} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{(\sigma^2 - 1)^2}}} = \sigma \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2}} \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial n}{\partial \zeta} = \frac{\frac{\zeta}{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{\sigma^4} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{(\sigma^2 - 1)^2}}} = \sigma \sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - \tau^2}} \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = a\sigma \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -a\tau \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{1 - \tau^2}} \cos \vartheta \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} = -a\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = -a\tau \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{1 - \tau^2}} \sin \vartheta \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} = a\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \cos \vartheta\,.$$

Demnach liegt dn in der Schnittlinie der Flächen $\tau =$ const und $\vartheta =$ const, und es ist

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dn} = \tau \left[A + B\left(\frac{2\sigma}{\sigma^2 - 1} - \log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)\right] \frac{d\sigma}{dn}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dn} = C\tau \frac{d\sigma}{dn}.$$

Die zweite Oberflächenbedingung (209a) fordert also

$$(1 + 4\pi\varkappa_a)\left[A + B\left(\frac{2\sigma'}{\sigma'^2 - 1} - \log\frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1}\right)\right] = C(1 + 4\pi\varkappa_i). \quad (209\text{b})$$

Durch (209) und (209b) sind die Constanten B und C bestimmt.

Durch Elimination von C findet man eine Gleichung für B allein, der man durch Multiplication mit dem Volumen des Ellipsoids

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \sigma' (\sigma'^2 - 1)$$

(denn $a\sigma'$ und $a\sqrt{\sigma'^2 - 1}$ sind die Halbaxen) die Gestalt

$$-(\varkappa_i - \varkappa_a) A V = -\frac{2}{3} B a^3 \left\{(1 + 4\pi\varkappa_a) + 4\pi(\varkappa_i - \varkappa_a)(\sigma'^2 - 1)\left(\frac{\sigma'}{2}\log\frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1} - 1\right)\right\}$$

geben kann; oder da

$$\frac{\sigma}{2}\log\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{2}\left[\log\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3\sigma^2} + \frac{1}{5\sigma^5} + \frac{1}{7\sigma^7} + \cdots$$

ist:

$$\left.\begin{aligned} &-(\varkappa_i - \varkappa_a)\frac{A}{a} V \\ &= -\frac{2}{3} B a^3 \left\{(1 + 4\pi\varkappa_a) + 4\pi(\varkappa_i - \varkappa_a)\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3\cdot 5\cdot \sigma'^2} - \frac{2}{5\cdot 7\sigma'^4} - \cdots\right]\right\} \end{aligned}\right\} (209\text{c})$$

Diese Gleichung ist nun leicht zu deuten. In unendlich grofser Entfernung vom Ellipsoid wird nach (207a) $\sigma = \infty$, da für diesen Werth das Ellipsoid

$$\frac{\xi^2}{a^2\sigma^2} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{a^2(\sigma^2 - 1)} = 1$$

in die unendlich ferne Kugel

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = a\sigma$$

übergeht. $a\sigma$ ist dort der Abstand vom Nullpunkt, während aus der Gleichung

$$\xi = a\sigma \cdot \tau$$

hervorgeht, dafs τ der Cosinus des Neigungswinkels zwischen dem Abstand und der x-Axe ist. Ferner wird für $\sigma = \infty$ nach der angegebenen Reihenentwicklung der vom magnetisirten Ellipsoid herrührende Antheil von φ_a

$$B\left(2 - \sigma \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)\tau = -\frac{2}{3}\frac{B}{\sigma^2}\tau = -\frac{2}{3}Ba^3 \cdot \frac{\tau}{a^2\sigma^2}.$$

Denkt man an die Bedeutung von $a\sigma$ und τ und zieht (190b) zum Vergleich heran, so erkennt man, dafs $-\frac{2}{3}Ba^3$ das magnetische Moment des Ellipsoids ist. (209c) sagt demnach aus, dafs bei gleichem Volumen V und gleicher Stärke $-\frac{A}{a}$ des erregenden Feldes das Moment des Ellipsoids um so gröfser ist, je gröfser seine numerische Excentricität $\frac{1}{\sigma'}$ ist. Der einer Kugel entsprechende Werth $\frac{1}{\sigma'} = 0$ ist am ungünstigsten.

Für abgeplattete Ellipsoide, deren Magnetisirung mit Hülfe der Potentialfunction (174b) auf S. 220 berechnet werden könnte, sind die Momente noch kleiner als für die Kugel.

Aus denselben Gründen wie bei der Kugel bleibt unsere Lösung auch dann gültig, wenn im Ellipsoid das Verhältnifs von Magnetisirung und Feldstärke nicht constant, sondern Function der letzteren ist; für $\varkappa_i = \infty$ wird nach (209b), (209a) und (208)

$$C = 0 \qquad \varphi_i = 0$$

$$\varphi_a = A\sigma\tau + B\left[2 - \sigma \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right]\tau$$

$$B = -A : \left[\frac{2}{\sigma'} - \log \frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1}\right].$$

Diese Gleichungen beantworten die Frage nach dem Gleichgewicht der Elektricität auf dem leitenden Ellipsoid in einem ursprünglich homogenen elektrischen Felde.

§ 54. Die Energie statischer elektrischer und magnetischer Felder. Der elektrische Condensator.

Aus der Bedingung, dafs $\mathfrak{W}$ im Gleichgewicht ein Minimum sein mufs, leiteten wir in § 52 die Gleichgewichtsbedingungen (203)

her. Wir berechnen jetzt vermöge dieser Beziehungen seinen Minimalwerth. Zu diesem Zweck setzen wir in (202)

$$F(s) = \frac{s^2}{2k} = \frac{1}{2k}(l^2 + m^2 + n^2)$$

und ersetzen l, m, n nach (203) durch die Differentialquotienten von φ. So entsteht die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W} = \iiint \varphi\, \varepsilon\, dx\, dy\, dz + \iint ds\, \varphi\, e \\ - \frac{1}{8\pi}\iiint (1 + 4\pi k)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \quad (210)$$

Das dritte hier auftretende Integral formen wir nun durch partielle Integration um; ein Oberflächenintegral über die unendlich ferne Begrenzung des elektrischen Feldes tritt wegen des Verhaltens von φ im Unendlichen dabei nicht auf; wohl aber müssen die im Endlichen gelegenen Unstetigkeitsflächen berücksichtigt werden. Man findet so, wenn man noch die Gleichungen (204) hinzuzieht:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi}\iiint (1 + 4\pi k)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = \\ &- \frac{1}{8\pi}\iiint \varphi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left((1 + 4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((1 + 4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left((1 + 4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right] dx\, dy\, dz \\ &- \frac{1}{8\pi}\iint ds\, \varphi \left[(1 + 4\pi k_1)\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + (1 + 4\pi k_2)\frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\iiint \varphi\, \varepsilon\, dx\, dy\, dz + \iint ds\, \varphi\, e\right]; \end{aligned}$$

setzt man dies in (210) ein, so erhält man für die Energie die beiden einander äquivalenten Formeln

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}\left[\iiint \varphi\, \varepsilon\, dx\, dy\, dz + \iint ds\, \varphi\, e\right] \quad (210\text{a})$$

und

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint (1 + 4\pi k)(X^2 + Y^2 + Z^2)\, dx\, dy\, dz. \quad (210\text{b})$$

Gleichung (210a) ist die unmittelbare Uebertragung von (187) auf den allgemeineren Fall der Anwesenheit polarisirbaren Körper; es kommt auch dann nur darauf an, auf welchem Potential die wahren Ladungen sind. Dagegen ist Gleichung (210b) die Verallgemeinerung von (187a), desjenigen Energieausdrucks, welcher der Faraday-Maxwell'schen Anschauungsweise näher liegt; sie vertheilt die Energie auf das ganze Kraftfeld mit der Dichte

$$\frac{1}{8\pi}(1 + 4\pi k)(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi k^2} s^2;$$

während in (210a) der Ort wahrer Ladungen als Sitz der Energie erscheint.

Die Gleichungen (201) und (204) für die Flächendichte vereinfachen sich an der Grenze leitender Körper, in welchen φ = const ist, zu

$$e = -\frac{1}{4\pi}(1 + 4\pi k_a)\frac{\partial\varphi}{\partial n_a} = (1 + 4\pi k_a)e'.$$

Taucht man also ein System geladener Conductoren aus Luft in ein homogenes, praktisch unendlich ausgedehntes, polarisirbares Dielektricum, so nehmen alle Werthe der Potentialfunction φ im Verhältniſs

$$\frac{e'}{e} = \frac{1}{1 + 4\pi k}$$

ab; denn φ bestimmt sich dann nach (199) und (200) aus der freien Ladung genau so, wie vorher aus der wahren. Aus (210a) oder (210b) folgt, daſs dann die Energie $\mathfrak{W}$ und ebenso die ihr unter sonst gleichen Umständen proportionalen ponderomotorischen Kräfte in demselben Verhältniſs abnehmen. Vergröſsert man nun aber die Ladungen im Verhältniſs $(1 + 4\pi k) : 1$, so daſs φ seinen alten Werth wieder annimmt, so ertheilt man der Energie den $(1 + 4\pi k)$fachen Betrag der ursprünglichen; dasselbe gilt von den ponderomotorischen Kräften. Vergröſsert man sie dagegen nur im Verhältniſs $\sqrt{(1 + 4\pi k)} : 1$, so nimmt $\mathfrak{W}$ den Anfangswerth an.

Sind P_1 und P_2 die Potentiale, auf denen sich die beiden mit den entgegengesetzt gleichen Elektricitätsmengen $\pm \mathfrak{e}$ geladenen Belegungen eines elektrischen Condensators befinden, so ist nach (210a) die Energie

$$\mathfrak{W} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{e}(P_1 - P_2).$$

Nun hängt aber die Potentialfunction mit den Ladungen stets linear

zusammen, wie z. B. aus den Gleichungen (204) hervorgeht; es mufs also eine Beziehung

$$P_1 - P_2 = \frac{\mathfrak{e}}{C}$$

bestehen, wo C eine nur von der Form und dem Material der Umgebung der Condensatorbelegungen abhängige Constante, die Capacität des Condensators, bedeutet. Eliminirt man aus der Gleichung für $\mathfrak{W}$ entweder die Ladung oder die Potentialdifferenz, so findet man

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2} C(P_1 - P_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{e}^2}{C}.$$

Wie $\mathfrak{W}$ bei constanten Potentialwerthen, ist dem ersten Theil dieser Doppelgleichung zufolge C proportional zur Dielektricitätsconstanten des die Belegungen umgebenden Dielektricums; dasselbe folgt aus ihrem zweiten Theil, da $\mathfrak{W}$ bei constanter Ladung zur Dielektricitätsconstanten umgekehrt proportional ist. Dabei ist es praktisch vollkommen ausreichend, wenn das Dielektricum den Zwischenraum der Belegungen erfüllt; denn in ihm sitzt das elektrische Feld fast ausschliefslich (vgl. § 47). Der Dimension nach ist die Capacität der Quotient aus einer Elektricitätsmenge und einer Potentialfunction; die letztere unterscheidet sich aber von der Elektricitätsmenge in der Dimension durch den Faktor L^{-1}, wie man am einfachsten an der Potentialfunction $\frac{\mathfrak{e}}{r}$ der Punktladung $\mathfrak{e}$ sieht, also ist

$$C = [L].$$

Man sieht es der Gleichung (210a) unmittelbar an, dafs sie für das von permanenten Magneten erregte magnetische Feld nicht gelten kann; denn da wahrer Magnetismus nicht existirt, so müfste man aus ihr $\mathfrak{W} = 0$ schliefsen. In der That sind ja auch die Gleichgewichtsbedingungen (203) zu ihrer Ableitung verwandt worden, während ihre magnetischen Analoga (203a) in Körpern, deren Magnetisirung von äufseren Einflüssen unabhängig ist, nicht gelten. Wir müssen defshalb auf die allgemeingültige Gleichung (202) zurückgreifen, welche auf das Gebiet des Magnetismus übertragen

$$\mathfrak{W} = \iiint \left\{ \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + F(\sigma) - \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx\, dy\, dz$$

lautet, und dürfen hier den Ansatz

$$F(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2\varkappa} = \frac{1}{2\varkappa}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)$$

und die Gleichungen (203a) nur für den Theil des Raumes verwenden, welcher von permanenter Magnetisirung frei ist. Zeichnen wir diesen Theil durch den Index 1, das von permanenten Magneten eingenommene Volumen aber durch den Index 2 aus, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W} = & -\frac{1}{8\pi}\iiint_1 (1+4\pi\varkappa)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \\ & + \iiint_2 \left\{\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + F(\sigma) \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (211)$$

Hier ist das Integral

$$\iiint_2 F(\sigma)\,dx\,dy\,dz$$

eine unveränderliche Gröfse. Alle Energiewerthe lassen sich aber nur bis auf eine Constante definiren, denn die einem System entzogene oder zugeführte Arbeit wird durch die Differenz der Energie im Anfangs- und Endzustand gemessen; und wenn man, wie bei der kinetischen Energie, einmal über diese Constante eine bestimmte Verfügung trifft, so geschieht es nur aus Zweckmäfsigkeitsgründen. Defshalb dürfen wir das genannte Integral ohne Weiteres fortlassen. Ferner ist die Constante $\varkappa$ für permanente Magnete bisher nicht definirt. Treffen wir nun die Bestimmung, dafs wir ihr dort den Werth 0 geben wollen, so können wir

$$-\frac{1}{8\pi}\iiint_1 (1 + 4\pi\varkappa)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) dx\,dy\,dz,$$

$$-\frac{1}{8\pi}\iiint_2 \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) dx\,dy\,dz =$$

$$-\frac{1}{8\pi}\iiint (1 + 4\pi\varkappa)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) dx\,dy\,dz$$

setzen, wo die Integration wieder über den **ganzen** Raum zu erstrecken ist. Jetzt führen wir an dem letzteren Integral dieselbe partielle Integration durch, wie am Anfang dieses Paragraphen, und berücksichtigen, dafs wegen (204) und (193) und nach unserer Festsetzung $\varkappa = 0$ im permanenten Magneten

$$\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\right\}$$

$$= 0 \text{ aufserhalb der permanenten Magnete}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\Delta\varphi = -\frac{1}{2}\mu' \text{ in den permanenten Magneten,}$$

dafs ferner an der Grenze temporär magnetisirter Körper nach (204)

$$\frac{1}{8\pi}\left[(1+4\pi\varkappa_1)\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+(1+4\pi\varkappa_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right]=0$$

ist. Dagegen nimmt der letztere Ausdruck an der Grenze eines permanenten Magneten, dessen innere Normale n_i ist, die Form

$$\frac{1}{8\pi}\left[(1+4\pi\varkappa_a)\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\right]$$

an; aus dem magnetischen Analogon zu (201a),

$$\frac{1}{4\pi}\left(\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}+4\pi\sigma_{n_i}\right)+\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}+4\pi\sigma_{n_a}\right)\right)=0\,,$$

folgt aber, dafs

$$-\frac{1}{4\pi}\left[(1+4\pi\varkappa_a)\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\right]=-\sigma_{n_i}$$

der Theil der Dichte der freien Ladung m' ist, welcher allein von der Magnetisirung des permanenten Magneten herrührt. Also ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)dx\,dy\,dz\\ =\frac{1}{2}\left[\iiint_2\varphi\,\mu'\,dx\,dy\,dz+\iint_2 ds\,\varphi\,m'\right]\end{aligned}\right\}\quad(211\text{a})$$

und nach (211)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{W}=\iiint_2\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\\ -\frac{1}{2}\left[\iiint_2\varphi\,\mu'\,dx\,dy\,dz+\iint_2 ds\,\varphi\,m'\right];\end{aligned}\right\}\quad(211\text{b})$$

Der Index 2 an dem Flächenintegral ist so zu verstehen, daſs nur der von permanenten Magneten herrührende Theil von m' einzusetzen ist. Schlieſslich formen wir auch noch das erste der hier auftretenden Integrale durch partielle Integration um; es ist nach (193) und (193a)

$$\iiint_2 \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= -\iiint_2 \varphi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz - \iint_2 ds\,\varphi\,\sigma_{n_i}$$

$$= \iiint_2 \varphi\,\mu'\,dx\,dy\,dz + \iint_2 ds\,\varphi\,m',$$

so daſs für $\mathfrak{W}$ nach (211b) die beiden äquivalenten Gleichungen:

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}\left[\iiint_2 \varphi\,\mu'\,dx\,dy\,dz + \iint_2 ds\,\varphi\,m'\right] \tag{211c}$$

und [siehe (211a)]

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint (1 + 4\pi\varkappa)(L^2 + M^2 + N^2)\,dx\,dy\,dz \tag{211d}$$

entstehen. (211c) entspricht der Gleichung (210a); die Rolle der wahren Elektricität spielt hier der scheinbare Magnetismus, soweit er permanenten Magneten angehört. (211d) vertheilt dagegen, den Faraday-Maxwell'schen Anschauungen entsprechend, die Energie mit der Dichte

$$\frac{1 + 4\pi\varkappa}{8\pi}(L^2 + M^2 + N^2)$$

auf das ganze Kraftfeld. Es äuſsert sich in der Analogie von (210b) und (211d) wieder einmal der Parallelismus der elektrischen und magnetischen Erscheinungen.

§ 55. Die ponderomotorischen Kräfte.

Solange wir in der Elektrostatik nur mit Conductoren im leeren Raum zu thun hatten, konnten wir (siehe § 48) beweisen, daſs die Arbeit gegen die ponderomotorischen Kräfte gleich der Zunahme der Energie ist, wie es das Energieprincip verlangt; denn wir kannten den Betrag der ponderomotorischen Kraft. In der Theorie der Dielektrica kennen wir ihn nicht; wir müssen vielmehr den um-

gekehrten Weg einschlagen, indem wir ihn aus dem Energieausdruck mit Hülfe des Energieprincips ermitteln. Der Vergleich des Ergebnisses mit der Erfahrung rechtfertigt den ohne Beweis angegebenen Ausdruck (202). Obwohl die Resultate für das elektrische und das magnetische Kraftfeld übereinstimmen, erfordern diese doch etwas verschiedene Behandlung, so dafs wir zunächst nur von dem elektrischen Feld sprechen wollen.

Da es sich um Gleichgewichtszustände handelt, können wir von der Gleichung (210)

$$\mathfrak{W} = \iiint \left\{ \varphi\, \varepsilon - \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) \right\} dx\, dy\, dz + \iint ds\, \varphi\, e$$

ausgehen, welche im Gegensatz zu (210a) und (210b) die Eigenthümlichkeit mit (202) gemein hat, dafs $\delta \mathfrak{W} = 0$ ist, wenn man bei constanten Ladungen φ unendlich wenig variirt. In der That ist dann

$$\delta \mathfrak{W} = \iiint \varepsilon\, \delta \varphi\, dx\, dy\, dz + \iint ds\, e\, \delta \varphi$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint (1 + 4\pi k) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint \delta \varphi \left\{ \varepsilon + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + 4\pi k) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + 4\pi k) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + 4\pi k) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} dx\, dy\, dz$$

$$+ \iint ds\, \delta \varphi \left\{ e + \frac{1}{4\pi} \left[(1 + 4\pi k_1) \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + (1 + 4\pi k_2) \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right] \right\}$$

und dies verschwindet nach (204). Wir ziehen aus diesem Umstand auf ähnliche Weise Vortheil, wie in § 52; wenn wir im Folgenden die Veränderung von $\mathfrak{W}$ durch eine unendlich kleine Verschiebung berechnen, so verfahren wir so, als bliebe φ davon unberührt; dafs sich φ thatsächlich ändert, macht ja nichts aus. Eine weitere bedeutende Vereinfachung erreichen wir, wenn wir von dem Princip der stetigen Uebergänge Gebrauch machen und alle Flächenbelegungen als Raumladungen von grofser Dichte betrachten; dann fallen alle Flächenintegrale fort und wir haben

$$\mathfrak{W} = \iiint \left\{ \varphi\, \varepsilon - \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) \right\} dx\, dy\, dz \tag{212}$$

zu setzen.

Für den Magnetismus können wir die entsprechende Gleichung finden, wenn wir die Gleichung (211 c) mit 2 multipliciren und (211 d) von ihr subtrahiren. Machen wir dann auch von dem Princip der stetigen Uebergänge Gebrauch, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W} = \iiint\limits_{2} \varphi\, \mu'\, dx\, dy\, dz \\ - \frac{1}{8\pi} \iiint (1 + 4\pi \varkappa) \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{212a}$$

Variirt man hier φ bei constantem μ', so folgt, da in permanenten Magneten $\varkappa$ nach der Festsetzung im vorigen Paragraphen 0 ist, nach (193) und (204)

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{W} = \iiint\limits_{2} \delta \varphi \left(\mu' + \frac{1}{4\pi} \varDelta \varphi \right) dx\, dy\, dz \\ + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{1} \delta \varphi \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + 4\pi\varkappa) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((1 + 4\pi\varkappa) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + 4\pi\varkappa) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dx\, dy\, dz = 0. \end{aligned}$$

(Die Berücksichtigung von Flächenintegralen würde hieran nichts ändern, aber ähnlich wie am Schlufs des letzten Paragraphen eine längere Discussion erfordern.) (212 a) hat also dieselbe Eigenthümlichkeit wie (212) und unterscheidet sich von letzterer Gleichung nur dadurch, dafs der freie Magnetismus der permanenten Magnete die wahre Elektricität vertritt. Daher können wir von jetzt an das elektrische und das magnetische Problem zugleich behandeln, wenn wir auch die Bezeichnungen dem ersteren anpassen.

Sind δa, δb, δc die Componenten der unendlich kleinen Verschiebung im Raumpunkte x, y, z, so rückt dabei in diesen der materielle Punkt, welcher vorher die Coordinaten $x - \delta a$, $y - \delta b$, $z - \delta c$ besafs. Dementsprechend wäre

$$- \left(\frac{\partial k}{\partial x} \delta a + \frac{\partial k}{\partial y} \delta b + \frac{\partial k}{\partial z} \delta c \right)$$

die Veränderung von k im Punkte x, y, z, wenn sich der Werth von k nicht auch in einem und demselben materiellen Punkte ändern könnte. Dies wird aber dann im Allgemeinen eintreten, wenn die Verrückung mit Deformation verbunden ist. Die allgemeinste Deformation ist (siehe Band II dieser Vorlesungen, § 14) die Superposition zweier Scheerungen und einer Dehnung; wir berücksichtigen aber nur die letztere, da bei Flüssigkeiten und Gasen die Scheerungen die physikalischen Eigenschaften nicht beeinflussen und feste Körper beim vorliegenden Problem ohnehin meist als starr zu betrachten sind. Dann haben wir die Aenderung von k in demselben materiellen Punkte als proportional zu der specifischen Vergrößerung des materiellen Volumelements dV

$$\frac{\delta' dV}{dV} = \frac{\partial\,\delta a}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta b}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta c}{\partial z} \tag{213}$$

zu betrachten; bezeichnen wir den Proportionalitätsfactor mit $-\Theta$, so ist die Aenderung von k im Punkte x, y, z

$$\delta k = -\left(\frac{\partial k}{\partial x}\delta a + \frac{\partial k}{\partial y}\delta b + \frac{\partial k}{\partial z}\delta c\right) - \Theta\left(\frac{\partial\,\delta a}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta b}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta c}{\partial z}\right). \tag{214}$$

Aehnlich berechnet sich die Veränderung $\delta\varepsilon$ der Raumdichte ε. Im starren Körper wäre sie gleich

$$-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\delta a + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\delta b + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\delta c\right).$$

Dazu kommt im Allgemeinen noch die Aenderung durch Deformation. Das Gesetz von der Erhaltung des elektrischen Quantums verlangt, daſs bei einem Nichtleiter die Ladung $\varepsilon\, dV$ des materiellen Volumelements dV constant bleibt; bezeichnet $\delta' f$ die Aenderung irgend einer Gröſse f in demselben materiellen Punkte, so muſs demnach

$$\delta'(\varepsilon\, dV) = dV\,\delta'\varepsilon + \varepsilon\,\delta'(dV) = dV\left(\delta'\varepsilon + \varepsilon\frac{\delta' dV}{dV}\right) = 0$$

sein, woraus nach (213)

$$\delta'\varepsilon = -\varepsilon\left(\frac{\partial\,\delta a}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta b}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta c}{\partial \varepsilon}\right)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon = \delta'\varepsilon - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\delta a + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\delta b + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\delta c\right)\\ = -\left(\frac{\partial(\varepsilon\,\delta a)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon\,\delta b)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon\,\delta c)}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{214a}$$

folgt. Für die freie Ladung der permanenten Magnete gilt das Gesetz der Unzerstörbarkeit nicht, über das Verhalten von μ' bei

Deformation weiſs die Theorie nichts auszusagen. Wir müssen deſshalb im Folgenden voraussetzen, daſs die permanenten Magnete ohne Deformation verschoben werden; die Functionen δa, δb, δc von x, y, z sind in ihnen daher nicht unabhängig von einander.

Die Componenten der im Volumelement $dx\,dy\,dz$ angreifenden ponderomotorischen Kraft sollen $\mathfrak{X}\,dx\,dy\,dz$, $\mathfrak{Y}\,dx\,dy\,dz$, $\mathfrak{Z}\,dx\,dy\,dz$ sein. Das Energieprincip verlangt

$$\delta\mathfrak{W} + \iiint (\mathfrak{X}\,\delta a + \mathfrak{Y}\,\delta b + \mathfrak{Z}\,\delta c)\,dx\,dy\,dz = 0. \tag{215}$$

$\delta\mathfrak{W}$ berechnen wir, indem wir in (212) bei constantem φ für $\delta\varepsilon$ und δk ihre Werthe nach (214) und (214a) einsetzen. Der von δa abhängige Antheil an $\delta\mathfrak{W}$ beträgt

$$\begin{aligned}
&\iiint\Big\{-\varphi\,\frac{\partial(\varepsilon\,\delta a)}{\partial x}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\left(\frac{\partial k}{\partial x}\,\delta a+\Theta\,\frac{\partial\,\delta a}{\partial x}\right)\Big\}\,dx\,dy\,dz\\
&=\iiint\delta a\,\Big\{\varepsilon\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\Big\}\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Ein Flächenintegral tritt wegen der angenommenen Stetigkeit der Uebergänge, und weil die Verschiebung sich nicht bis in's Unendliche erstrecken soll, nicht auf; die beiden anderen Antheile haben die entsprechenden Formen. Da (215) für beliebige Functionen δa, δb, δc erfüllt sein soll, muſs

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}&=-\varepsilon\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\\
\mathfrak{Y}&=-\varepsilon\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial k}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\Theta\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\\
\mathfrak{Z}&=-\varepsilon\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial k}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\Theta\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{216}$$

sein.

Ponderomotorische Kräfte greifen also nicht nur am Sitz wahrer Elektricität an, sondern auch dort, wo sich die Constante k räumlich ändert. In der That nimmt nach (212) $\mathfrak{W}$ ab und die ponderomotorischen Kräfte leisten Arbeit, wenn durch die unendlich kleine Verrückung an den Orten gröfster Feldintensität k zunimmt; denn φ kann man dabei als constant betrachten. Dorthin streben die ponderomotorischen Kräfte die Körper zu ziehen, welche stärker polarisirbar sind, als ihre Umgebung.

Handelt es sich um das magnetische Feld, so müssen wir die Functionen δa, δb, δc in den permanenten Magneten so wählen, dafs sie keine Deformation ergeben. In Folge dessen lassen sich die Gleichungen (216) zwar ohne Einschränkung auf temporär magnetisirte Substanzen, auf permanente Magnete aber nur insofern übertragen, als sie die Arbeit bei Verschiebungen ohne Deformation richtig anzugeben gestatten. Da dort $\varkappa = 0$ und dementsprechend auch $\Theta = 0$ ist, liefern sie:

$$\mathfrak{X} = -\mu' \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\mathfrak{Y} = -\mu' \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\mathfrak{Z} = -\mu' \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,.$$

Es findet sich hier die in §§ 49—51 stillschweigend gemachte Voraussetzung bestätigt, dafs man sich die Orte freier magnetischer Ladungen als die Angriffspunkte der ponderemotorischen Kraft zu denken hat, wenn man den Magneten als starren Körper betrachtet. Die Anziehung temporär magnetisirbarer Körper durch permanente Magnete beruht auf den Termen $-\frac{1}{2}\frac{\partial \varkappa}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)$ etc.

§ 56. Die Maxwell'schen Spannungen.

Die Gleichungen (216) lassen nun eine Umformung zu, welche für die Auffassung vom Wesen der elektrischen Erscheinungen äufserst wichtig ist. Vermöge (204) ist nämlich die Gleichung

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$
$$=-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+4\pi k)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((1+4\pi k)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+4\pi k)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left((1+4\pi k)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]$$

eine Identität. Die erste der Gleichungen (216) läfst sich also schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}=\frac{\partial}{\partial x}&\left[\frac{1+4\pi k}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\Theta\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right]\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+4\pi k}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1+4\pi k}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\quad(216\text{a})$$

Für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ gilt Entsprechendes.

In dieser Gestalt erinnern die Gleichungen an bekannte Formeln aus der Theorie der deformirbaren Körper (siehe Band II dieser Vorlesungen, § 15ff.). In einem deformirten festen Körper herrschen Spannungen, deren neun Componenten

$$\begin{matrix}X_x, & X_y, & X_z\\ Y_x, & Y_y, & Y_z\\ Z_x, & Z_y, & Z_z\end{matrix}$$

durch die Forderung definirt werden, dafs irgend ein Volumelement dV des Körpers von ihnen eine Kraft erfährt, deren Componenten

$$\mathfrak{X}\,dV=-\overline{\iint}ds\,(X_x\cos(n_i x)+X_y\cos(n_i y)+X_z\cos(n_i z))$$
$$\mathfrak{Y}\,dV=-\overline{\iint}ds\,(Y_x\cos(n_i x)+Y_y\cos(n_i y)+Y_z\cos(n_i z))$$
$$\mathfrak{Z}\,dV=-\overline{\iint}ds\,(Z_x\cos(n_i x)+Z_y\cos(n_i y)+Z_z\cos(n_i z))$$

sind; die Flächenintegrale sind für die Oberfläche von dV zu bilden. Der Satz von der Erhaltung der Flächenmomente legt ihnen noch die Bedingungen

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x$$

auf. Die Umformung nach dem GAUSSschen Satz liefert unmittelbar die Beziehung

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mathfrak{Y} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mathfrak{Z} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{217}$$

Diese Gestalt nehmen aber Gleichung (216 a) und die ihr entsprechenden an, wenn man

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{1 + 4\pi k}{8\pi}\left(+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Theta\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \\
Y_y &= \frac{1 + 4\pi k}{8\pi}\left(-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Theta\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \\
Z_z &= \frac{1 + 4\pi k}{8\pi}\left(-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Theta\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \\
Y_z &= Z_y = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\
Z_x &= X_z = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
X_y &= Y_x = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{217 a}$$

setzt. Die ponderomotorische Wirkung des elektrischen und des magnetischen Feldes läfst sich also auf Spannungen in den Dielektriken und den magnetisirbaren Körpern zurückführen. Dies ist der Standpunkt der FARADAY-MAXWELL'schen Theorie, welche

die unvermittelte Fernwirkung als unvorstellbar verwirft. In leitenden Körpern verschwinden die Spannungen wegen $\varphi = \text{const.}$

Jedes System von Spannungen läſst sich auf drei sogenannte Hauptspannungen reduciren, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daſs, auf ein zu ihnen paralleles Axenkreuz bezogen, die Componenten

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x$$

verschwinden. Unbestimmtheiten können nur entstehen, wenn zwei oder alle drei Hauptspannungen den gleichen Betrag haben. Nun giebt es im isotropen Körper im elektrischen Feld nur eine ausgezeichnete Richtung, die der elektrischen Kraft; in ihr muſs die eine Hauptspannung liegen, während die beiden anderen in der zu ihr senkrechten Ebene beliebig angenommen werden können. Thatsächlich gilt dies auch für Stellen, in denen die Isotropie dadurch gestört ist, daſs sich die Constante k ändert; die Schnelligkeit der Aenderung hängt ja von der Richtung ab. Denn aus (217 a) folgt in allen Fällen, wenn man die x-Axe der Kraft parallel legt

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \left(+\frac{1+4\pi k}{8\pi}+\frac{\Theta}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \\ Y_y &= \left(-\frac{1+4\pi k}{8\pi}+\frac{\Theta}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \\ Z_z &= \left(-\frac{1+4\pi k}{8\pi}+\frac{\Theta}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \\ Y_z = Z_y = 0, \quad Z_x &= X_z = 0, \quad X_y = Y_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{217 b}$$

Da sich die Gleichungen (217) dann auf

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial X_x}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\partial Y_y}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

reduciren, bedeutet ein positiver Werth von X_x, Y_y oder Z_z einen Zug, ein negativer einen Druck, denn $\mathfrak{X}$ weist von Orten niederen zu solchen höheren Werthes von X_x.

Nehmen wir zunächst einmal k als durch Dehnung unveränderlich ($\Theta = 0$) an, so herrscht in der Richtung der Kraftlinie ein der Energiedichte $\frac{1+4\pi k}{8\pi}\mathfrak{E}^2$ gleicher Zug, senkrecht dazu ein Druck von demselben Betrage. Darüber lagert sich im Allgemeinen noch der nach allen Richtungen gleichmäſsige Druck oder Zug $\frac{\Theta}{2}\mathfrak{E}^2$.

Bei Gasen ist es ein Zug, da bei ihnen k mit wachsender Dichte zunimmt, Θ also positiv ist; diese Körper streben, sich an den Stellen stärkster Feldintensität zu verdichten, bis ihr mit wachsender Dichte steigender hydrostatischer Druck diesen Zug compensirt. Da hierbei k wächst, äufsert sich auch hierin das Streben der ponderomotorischen Kräfte, den Werth von k im stärksten Feld zu vergröfsern.

Als incompressibel bezeichnet man eine Substanz, bei der die kleinste Verdichtung den Druck aufserordentlich steigert. Bei diesen ist das Glied mit Θ praktisch unwirksam.

Wie im Vacuum oder einem anderen Medium, in welchem $\Theta = 0$ ist, diese Spannungen die vom COULOMB'schen Gesetz geforderten Anziehungen und Abstofsungen hervorbringen, läfst sich anschaulich an dem Beispiel zweier geladener Kugeln zeigen. Sind die Ladungen entgegengesetzt gleich, so führen alle auftretenden Kraftlinien von der einen zur anderen, und die Spannungen in ihrer Längsrichtung setzen sich zu einer Anziehung zusammen; sind sie hingegen von gleichem Vorzeichen, so laufen die Kraftlinien neben einander her in's Unendliche und der quer zu ihnen wirkende Druck tritt in einer Abstofsung der Kugeln zu Tage.

An der Oberfläche leitender Körper endigen die Kraftlinien und stehen senkrecht auf ihr; daher erleidet diese einen Zug nach Aufsen, dessen Stärke nach (217 b) und (204) den Betrag

$$\frac{1 + 4\pi k}{8\pi} \mathfrak{E}_n^2 = \frac{1}{2} e \mathfrak{E}_n$$

hat. Der zunächst auffällige Factor $\frac{1}{2}$ findet seine Erklärung durch die auch leicht quantitativ durchzuführende Ueberlegung, dafs die Feldstärke in der unendlich dünnen Schicht, welche die Flächenbelegung enthält, nicht constant ist, sondern von $\mathfrak{E}_n$ zu 0 abnimmt.

Alles dies beweist natürlich nur die Zulässigkeit der FARADAY-MAXWELL'schen Anschauung; die Fernwirkungstheorie ist hierdurch nicht widerlegt. Nun kann man sich zwar den Zug in Richtung der Kraftlinien in der ponderablen Materie aus der Anziehung der polarisirten Molekeln erklären, welche sich in dieser Richtung ihre ungleichnamigen Pole zuwenden. Dagegen versagt diese Vorstellung bei dem Vacuum, das wir als durchaus continuirlich auffassen müssen. Es liegt daher der Versuch nahe, eine vermittelnde Theorie aufzustellen, welche an der Fernwirkung im Vacuum festhält, dagegen die Vermittlung der Wirkung durch etwa im elektrischen Felde befindliche ponderable Materie zugiebt. Wir werden eine solche später noch genauer kennen lernen. Die Gleichungen für die

ponderomotorische Wirkung, welche dieser Idee Ausdruck verleihen, erhält man, wenn man zu den Formeln (216) die Identitäten

$$0 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right] \text{ etc.}$$

addirt. Drückt man dann nach (203) die Componenten der Feldstärke durch die der Polarisation aus und setzt nach (201)

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi = \varepsilon',$$

so findet man

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= -\varepsilon'\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial X_x'}{\partial x} + \frac{\partial X'}{\partial y} + \frac{\partial X_z'}{\partial z} \\
\mathfrak{Y} &= -\varepsilon'\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial Y_x'}{\partial x} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z} \\
\mathfrak{Z} &= -\varepsilon'\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial Z_x'}{\partial x} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z}, \\
&\text{wo} \\
X_x' &= \frac{1}{2k}(+l^2 - m^2 - n^2) + \frac{\Theta}{2k^2}(l^2 + m^2 + n^2) \\
Y_y' &= \frac{1}{2k}(-l^2 + m^2 - n^2) + \frac{\Theta}{2k^2}(l^2 + m^2 + n^2) \\
Z_z' &= \frac{1}{2k}(-l^2 - m^2 + n^2) + \frac{\Theta}{2k^2}(l^2 + m^2 + n^2) \\
X_y' &= Y_x' = \frac{lm}{k} \\
Y_z' &= Z_y' = \frac{mn}{k} \\
Z_x' &= X_z' = \frac{nl}{k}
\end{aligned}\right\} \qquad (217\text{ c})$$

zu setzen ist. Die Glieder $-\varepsilon'\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ etc. geben die im Vacuum allein auftretende Fernwirkung, die anderen die vermöge der Spannungen X_x' etc. durch die Materie hindurch übertragene Wirkung an.

Alle Ausführungen dieses Paragraphen gelten für den Magnetismus ebenso wie für die Elektricität; nur permanente Magnete sind ausgeschlossen.

Zweiter Abschnitt.

Stationäre elektrische Ströme.

§ 57. Die Stromdichte und ihre Abhängigkeit von der elektrischen Kraft.

In einem Leiter galt uns bisher die elektrische Feldstärke als verschwindend, ihre Potentialfunction also als constant. Dies ist nun thatsächlich nur bei chemisch und thermisch homogenen leitenden Körpern der Fall; jeder Unterschied der Temperatur oder der chemischen Beschaffenheit hat dagegen Potentialdifferenzen zwischen den Theilen eines Systems von Leitern zur Folge; z. B. sind die beiden Pole eines galvanischen Elements auf verschiedenem Potential. Stellt man zwischen ihnen noch eine andere leitende Verbindung her, so kann sich erfahrungsgemäfs auch in dieser im Allgemeinen kein Potentialgleichgewicht herstellen; vielmehr treten in ihr elektrische Kräfte auf, welche bei der Beweglichkeit der Elektricität im Leiter zur Folge haben müssen, dafs positive Elektricität von Orten höheren nach solchen niederen Potentials oder negative in umgekehrter Richtung strömt, oder dafs beides zugleich stattfindet. Die hier zu besprechenden Thatsachen lassen keine Entscheidung zwischen diesen drei Möglichkeiten zu; vielmehr läfst bei den Metallen nur das HALL'sche Phänomen[1]), bei den Elektrolyten die chemischen Zersetzungen und Concentrationsänderungen einen Schlufs auf die Antheile der positiven und der negativen Elektricität am Strome zu. Wir können aber allen folgenden Erörterungen den Begriff der Stromdichte zu Grunde legen, für dessen Definition positive in der einen Richtung und negative in der anderen Richtung bewegte Elektricität vollkommen äquivalent sind. Trotz dieses Elektricitätsausgleichs ist der betrachtete Vorgang zeitlich unveränderlich. Man spricht defshalb von einem stationären elektrischen Strom, indem man die Bezeichnungen „statisch" und „stationär" in

---

[1]) Neuerdings auch die elektromagnetisch-thermischen Wechselwirkungen. Der Herausgeber.

der Elektricitätslehre zu einer ähnlichen Unterscheidung verwendet, wie in der Dynamik. Statische Zustände sind in beiden Gebieten Gleichgewichtszustände, als stationär bezeichnet man dagegen zeitlich unveränderliche Bewegungen. In der Elektricitätstheorie kommt noch der Unterschied hinzu, dafs (siehe § 61) stationäre Ströme nothwendiger Weise Energieumsetzungen herbeiführen, welche im elektrostatischen Felde gänzlich fehlen.

Als Stromdichte definiren wir einen Vector von der Gröfse q und den Componenten u, v, w durch die Festsetzung, dafs

$$dt\, ds\, q_n = dt\, ds\left(u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)\right)$$

der Betrag der positiven Elektricität sein soll, welche im Sinne der Normalen n das Flächenelement ds in der Zeit dt passirt, vermehrt um den absoluten Betrag der negativen Elektricität, welche in der entgegengesetzten Richtung hindurchtritt. Diese Definition ist offenbar der entsprechenden in der Hydrodynamik gebrauchten analog, nur mit dem Unterschied, dafs wir bei der ponderablen Materie negative Quanten nicht kennen. Trotz dieses Unterschiedes ist ganz wie in der Hydrodynamik das Integral $dt\overline{\iint} ds\, q_{n_i}$ erstreckt über eine geschlossene Fläche (wofür der Strich über den Integralzeichen als Hinweis dienen soll), die in der Zeit dt erfolgte Zunahme der Gesammtladung des eingeschlossenen Raumes, da positive und negative elektrische Quanten sich algebraisch addiren. Es spricht sich hierin aus, dafs wir die Elektricität wie die Materie als unvermehrbare und unverminderbare Substanz betrachten. Die Berechtigung dazu läfst sich natürlich nur aus der Erfahrung herleiten.

Dies Integral $\overline{\iint} ds\, q_{n_i}$ ist überall da von Null verschieden, wo Ladungen entstehen oder, wie bei der Condensatorentladung, verschwinden. Bei allen stationären Vorgängen mufs es aber Null sein. Aus der Gleichung

$$\overline{\iint} ds\, q_{n_i} = \overline{\iint} ds\left(u\cos(n_i,x) + v\cos(n_i,y) + w(\cos n_i,z)\right) = 0\,, \tag{218}$$

welche demnach für jede geschlossene Fläche gelten mufs, fliefsen sogleich zwei wichtige Folgerungen: Formt man das Flächenintegral nach dem Gauss'schen Satz in ein Raumintegral um, so findet man für jeden beliebigen Raumtheil

$$\iiint\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = 0\,;$$

wählt man ihn so klein, dafs man die stetige Function $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ in ihm als constant ansehen kann, so folgt, dafs überall

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{218a}$$

sein mufs. Wenden wir andererseits (218) auf die Oberfläche eines unendlich kleinen Cylinders an, dessen Höhe wiederum gegen die Querdimensionen seiner Grundflächen ds verschwindend klein ist, so reducirt sich das Integral $\overline{\iint} ds\, q_{n_i}$ auf $-ds(q_{n_1} + q_{n_2})$, wenn n_1 und n_2 die von den beiden Flächen ds nach Aufsen gerichteten Normalen sind, und die genannte Gleichung verlangt, dafs

$$q_{n_1} + q_{n_2} = 0 \tag{218b}$$

ist. In Raumtheilen, in denen sich die physikalische Beschaffenheit stetig ändert, folgt dies schon aus der Stetigkeit von u, v, w; anders aber an Unstetigkeitsflächen; dort ist es eine für die Vertheilung der Strömung wesentliche Grenzbedingung.

Fragen wir nun nach dem Zusammenhang zwischen der Stromdichte und der die Strömung hervorrufenden elektrischen Kraft. Das Ohm'sche Gesetz behauptet als Erfahrungsthatsache, dafs beide Vectoren gleichgerichtet und an Gröfse einander proportional sind; danach gelten die Gleichungen

$$u = -\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\tau \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{219}$$

Der Proportionalitätsfactor τ, die Leitfähigkeit, ist eine stets positive Körperconstante. Aus (218a) und (219) folgt für φ unmittelbar die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0, \tag{220}$$

welche für homogene Körper in

$$\Delta \varphi = 0$$

übergeht, während an Unstetigkeitsflächen nach (218b) und (219)

$$\tau_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \tau_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = 0 \tag{220a}$$

ist. An der Grenze gegen ein Dielektricum gilt, da dessen Leitfähigkeit 0 ist,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0,$$

wenn n_i die in das Innere des Leiters weisende Normale ist. Der andere Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}$ bleibt dagegen durch diese Gleichung vollkommen unbestimmt.

Berechnet man aus (200) und (220) die Dichten der Raum- und Oberflächenladung, $-\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi$ und $-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right)$, so sieht man, dafs im Inneren des stromdurchflossenen Leiters überall dort Ladungen liegen, wo sich die Leitfähigkeit τ stetig oder unstetig ändert. Auch die Begrenzung gegen das Dielektricum trägt solche, doch bleibt ihr Betrag noch unbestimmt; wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.

§ 58. Die elektromotorischen Kräfte.

Nach dem Ohm'schen Gesetz, wie wir es bisher formulirten, fallen Strom- und Kraftlinien zusammen. Die letzteren führen nun nothwendig von Orten höheren zu Stellen niederen Potentials, und besitzen entweder im Leiter Anfangs- und Endpunkte, oder treten durch die Oberfläche in die nichtleitende Umgebung aus. Dagegen müssen die Stromlinien nach (218) immer im Leiter verlaufen und sich in sich selbst schliefsen. Aus diesem Widerspruch folgt, dafs es, wenn das bisher Gesagte allgemein gültig wäre, einen stationären elektrischen Strom überhaupt nicht geben könnte. Thatsächlich ist die elektrische Feldstärke nicht die einzige mögliche Ursache für einen solchen; vielmehr müssen die Gleichungen (219) ergänzt werden zu

$$\left.\begin{aligned} u &= \tau\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\alpha\right) \\ v &= \tau\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\beta\right) \\ w &= \tau\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\gamma\right). \end{aligned}\right\} \tag{221}$$

Den Vector mit den Componenten α, β, γ, dessen absoluten Betrag wir mit δ bezeichnen, nennt man die locale elektromotorische Kraft, weil er auch für sich allein im Stande ist, Elektricität in Bewegung zu setzen; sie ist es, welche die strömende Elektricität immer wieder vom niederen zum höheren Potential zurückführt und so einen stationären Strom ermöglicht. Sie tritt nur dort auf, wo sich

die chemische oder thermische Beschaffenheit des Leiters von Ort zu Ort ändert, z. B. in elektrolytischen Lösungen von wechselnder Concentration oder in ungleich temperirten Metallen.

Besonders wichtig ist der Fall, dafs sich die Aenderung der chemischen Beschaffenheit auf einen Raum concentrirt, welcher sich von der Grenze zweier Körper nur auf moleculare Distanzen in ihr Inneres erstreckt. Dann hat die elektromotorische Kraft auch nur in diesem schmalen Bereich ihren Sitz, und man spricht von einer elektromotorisch wirksamen Fläche. Um ihren Einflufs zu untersuchen, bezeichnen wir mit dn das Element einer senkrecht zu dieser Fläche den genannten Raum durchdringenden Curve und fassen die Gleichungen (221) mit den Factoren $\frac{\cos(n,x)}{\tau}dn$, $\frac{\cos(n,y)}{\tau}dn$, $\frac{\cos(n,z)}{\tau}dn$ zusammen. Integriren wir dann vom Eintrittspunkt 1 der Curve in dies Raumgebiet bis zu ihrer Austrittsstelle 2, so erhalten wir

$$\int_1^2 \frac{q_n}{\tau} dn = \varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 \delta_n dn.$$

Die Stromdichte q in diesem Bereich ist durch die Gleichung (218a) mit den Werthen von q in seiner Umgebung verbunden; sie kann nicht in diesem Bereich allein sehr grofs werden. Defshalb könnte das nur über moleculare Distanzen zu erstreckende Integral $\int_1^2 \frac{q_n}{\tau} dn$ höchstens bei aufserordentlich starken Strömen einen merklichen Werth haben; erfahrungsgemäfs entzieht sich sein Einflufs stets der Wahrnehmung. Dagegen giebt es keinen Grund, dafs die locale elektromotorische Kraft δ in Folge der jähen Veränderung aller physikalischen Eigenschaften nicht so grofs werden sollte, dafs $\int_2^1 \delta_n dn$ einen erheblichen Betrag $+ E_{12}$ hat; dieser kann natürlich nur von der Art der an einander stofsenden Körper abhängen. Unter diesen Umständen findet an ihrer Berührungsfläche ein Potentialsprung

$$\varphi_2 - \varphi_1 = E_{12} \tag{221a}$$

statt. E_{12} bezeichnet man als die elektromotorische Kraft der Fläche; sie ist, wie man hier sieht, eine scalare Gröfse von der

Dimension der Potentialfunction, während die „locale" elektromotorische Kraft δ ein Vector von der Dimension der Feldstärke ist.

Wo locale elektromotorische Kräfte auftreten, ist die Differentialgleichung (220) und die Oberflächenbedingung (220a) zu ersetzen durch

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial(\tau\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial(\tau\beta)}{\partial y}+\frac{\partial(\tau\gamma)}{\partial z} \tag{222}$$

und

$$\tau_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+\tau_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}=\tau_1\delta_{n_1}+\tau_2\delta_{n_2}, \tag{222a}$$

und die Raum- und Flächendichte der im leitenden System liegenden freien Ladungen sind nach (201)

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon' &= -\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi}\left(u\frac{\partial\frac{1}{\tau}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{\tau}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{\tau}}{\partial z}\right)\\
e' &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right)=-\frac{1}{4\pi}(\delta_{n_1}+\delta_{n_2})+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{q_{n_1}}{\tau_1}+\frac{q_{n_2}}{\tau_2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{222b}$$

Dazu tritt noch an elektromotorisch wirksamen Flächen eine Doppelschicht vom Moment

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{4\pi}E_{12},$$

denn nur eine solche kann nach § 20 den Potentialsprung $\varphi_2-\varphi_1$ erklären. Die ersten Klammern in den Gleichungen (222b) sind von der Stromdichte unabhängig, sie geben die Ladung des Leiters bei verschwindendem Strom an. Die von ihnen ausgehende elektrische Kraft hält also die elektromotorische Kraft im Gleichgewicht. Die beiden anderen Klammern $\left(u\frac{\partial\frac{1}{\tau}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{\tau}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{\tau}}{\partial z}\right)$ und

$$\frac{q_{n_1}}{\tau_1}+\frac{q_{n_2}}{\tau_2}=q_{n_1}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)$$

sind der Stromdichte und der Veränderlichkeit von $\frac{1}{\tau}$ proportional. In der Gleichung für $\mathfrak{M}$ fehlt das entsprechende Glied.

Wir sahen am Eingang dieses Paragraphen, daſs elektromotorische Kräfte zur Unterhaltung eines stationären Stroms nothwendig sind; fragen wir nun nach der hinreichenden Bedingung dafür. Mit dl bezeichnen wir das Linienelement einer beliebigen Curve und fassen die Gleichungen (221) mit den Factoren $\frac{\cos(dl, x)}{\tau} dl$, $\frac{\cos(dl, y)}{\tau} dl$, $\frac{\cos(dl, z)}{\tau} dl$ zusammen. Integriren wir dann über eine beliebige, ganz in Leitern verlaufende, geschlossene Curve so hebt sich der auf die Potentialfunction bezügliche Term heraus und man findet

$$\overline{\int} \frac{1}{\tau} \left\{ u \cos(dl, x) + v \cos(dl, y) + w \cos(dl, z) \right\} dl$$
$$= \overline{\int} (\alpha \cos(dl, x) + \beta \cos(dl, y) + \gamma \cos(dl, z))\, dl$$

oder auch, indem man unter q_l, δ_l die in die Richtung von dl fallende Componente der Vectoren q und δ versteht

$$\overline{\int} \frac{q_l}{\tau} dl = \overline{\int} \delta_l\, dl. \tag{223}$$

Wählen wir nun als Integrationsweg eine Stromcurve und durchlaufen wir sie in der Stromrichtung, so ist der Integrand $\frac{q_l}{\tau}$ längs des ganzen Weges positiv, das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung also von 0 verschieden. Nothwendige Bedingung für die Existenz eines Stromes ist deshalb, daſs es geschlossene Curven giebt, längs welcher $\overline{\int} \delta_l\, dl$ von Null verschieden ist. Dies ist aber auch hinreichend, denn bei fehlendem Strom ist die linke Seite von (223) für alle Integrationswege Null, was sich wiederum nicht mit dieser Gleichung verträgt. Nun ist diese Bedingung sicherlich nicht erfüllt, wenn das leitende System nur aus zwei homogenen Körpern von gleichmäſsiger Temperatur besteht; denn dann sind in dem fraglichen Integral alle die Theile 0, welche von den in einem der Körper zurückgelegten Strecken herrühren. Dagegen ist bei jedem Durchgang durch die Grenzschicht vom ersten zum zweiten $\int \delta_l\, dl = + E_{12}$, bei jedem Durchgang in der umgekehrten Richtung dagegen $\int \delta_l\, dl = - E_{12}$, und da eine geschlossene Curve die Grenze ebenso oft in der einen als in der anderen Richtung passiren muſs, so ist die Summe aller

dieser Beträge 0. Zum Zustandekommen stationärer Strömung sind also mindestens drei homogene Körper nothwendig; sie dürfen aber nicht alle sogenannte Leiter erster Classe (Metalle) sein, welche den Strom ohne chemische Zersetzung leiten; denn für diese gilt bei Temperaturgleichgewicht das VOLTA'sche Gesetz der Spannungsreihe

$$E_{12} + E_{23} = E_{13},$$

sodaſs für irgend eine geschlossene Curve, welche die Reihe der Körper vom 1 ten zum n ten durchläuft, um von ihm unmittelbar zum ersten zurückzukehren

$$\int \bar{\delta}_l \, dl = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n} - E_{1n} = 0$$

ist. Vielmehr sind mindestens ein Elektrolyt, wie beim galvanischen Element, oder aber Temperaturunterschiede, wie bei den Thermoketten, zur Unterhaltung eines stationären Stroms nothwendig.

Durch das Auftreten einer Doppelschicht an elektromotorisch wirksamen Flächen und das VOLTA'sche Gesetz wird die Hypothese nahegelegt, daſs die Molekeln der Leiter erster Classe auf die elektrischen Fluida eine nach ihrer chemischen Beschaffenheit und nach dem Vorzeichen der letzteren wechselnde Anziehung ausüben. Diese Kräfte leisten ein gewisses Arbeitsquantum $A_{12}\,d\mathfrak{e}$, wenn sie die Elektricitätsmenge $d\mathfrak{e}$ aus der Grenzschicht des Körpers 1 in die des Körpers 2 hinüberziehen. Im Gleichgewicht muſs dies nach dem Princip der virtuellen Verrückungen durch die dabei von der elektrischen Feldstärke geleistete Arbeit $(\varphi_1 - \varphi_2)\,d\mathfrak{e}$ compensirt werden, d. h. es muſs

$$A_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

und nach (221a)

$$A_{12} = E_{12}$$

sein. Der Potentialsprung E_{12} ist also unmittelbar das Maaſs für die potentielle Energie der fraglichen Anziehung. Das VOLTA'sche Gesetz erscheint dann als Folge des Energieprincips, demgemäſs das Arbeitsquantum $A_{13}\,d\mathfrak{e}$ geleistet werden muſs, mag die Ueberführung von $d\mathfrak{e}$ aus dem Körper 1 in den Körper 3 nun unmittelbar, oder auf dem Umweg über den Körper 2 erfolgen; denn hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$A_{12} + A_{23} = A_{13},$$

also

$$E_{12} + E_{23} = E_{13}.$$

Eng verknüpft mit der soeben behandelten ist die weitere Frage, ob bei gegebener Vertheilung der elektromotorischen Kräfte die

Strömung eindeutig bestimmt ist. Zur Beantwortung gehen wir davon aus, dafs die Gleichungen (222) und (222a), durch welche der Zusammenhang zwischen φ und δ resp. E_{12} gegeben ist, in diesen Gröfsen linear sind, ebenso wie die Gleichungen (221), welche die Stromdichte q aus φ und δ zu berechnen gestattet. Genügen die Functionen φ, u, v, w diesen Gleichungen für ein gegebenes Werthsystem α, β, γ und E_{12}, und entsprechen die Functionen φ', u', v', w' auf dieselbe Art den Werthen α', β', γ' und E_{12}', so sind demnach $\varphi + \varphi'$ die Potentialfunction und $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ die Componenten der Stromdichte für den Fall, dafs die locale elektromotorische Kraft durch die Componenten $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$ und der Potentialsprung durch $E_{12} + E_{12}'$ bestimmt ist; d. h. es gilt das Superpositionsprincip. Entsprechen demnach die Functionen u, v, w und u', v', w' denselben Werthen α, β, γ und E_{12}, so stellen die Differenzen $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$ diejenige Strömung dar, welche den Werthen $\alpha = \beta = \gamma = E_{12} = 0$ entspricht; daraus folgt aber nach (223), wie wir schon zeigten

$$u - u' = v - v' = w - w' = 0$$

d. h. die Stromdichte bestimmt sich eindeutig aus der Vertheilung der elektromotorischen Kraft; in der Potentialfunction φ dagegen bleibt eine Constante unbestimmt; denn in den hier auftretenden Gleichungen kommen aufser der Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ nur Differentialquotienten von φ vor. Der Grund dafür ist der, dafs man dem stromleitenden System noch eine solche Oberflächenladung in beliebiger Stärke geben kann, deren Potentialfunction in ihm constant ist, welche also die Strömung im Inneren nicht beeinflufst; aus demselben Grunde blieb oben auch die Dichte der Oberflächenladung unbestimmt (siehe das Ende des vorigen Paragraphen).

Im Gegensatz hierzu ist die Vertheilung der elektromotorischen Kräfte aus der Stromdichte allein nicht eindeutig zu ermitteln. Denn leiten sich α, β, γ ähnlich wie die Feldstärke aus einer eindeutigen Potentialfunction χ ab, d. h. gelten Gleichungen wie

$$\alpha = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \chi}{\partial z},$$

so ist in (223) $\overline{\int} \delta_l \, dl$ für alle geschlossenen Curven 0, es ruft diese Vertheilung keinen Strom hervor. Addirt man sie zu irgend einer anderen, so ändert sich die Stromdichte nicht. Erst wenn aufser u, v, w auch noch φ gegeben ist, berechnet sich α, β, γ aus (221) eindeutig.

Zum Schlufs dieses Paragraphen wollen wir noch auf die Analogie hinweisen, welche zwischen der Theorie des stationären elektrischen Stroms und der der magnetisirbaren Körper besteht. In einem Leiter ohne elektromotorische Kraft gelten nach (220) und (220a) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0$$

und die Oberflächenbedingung

$$\tau_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+\tau_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}=0\,,$$

in einem temporär magnetisirbaren Medium dagegen nach (204)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0$$

$$(1+4\pi\varkappa_1)\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+(1+4\pi\varkappa_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}=0\,,$$

Diese Gleichungen stimmen überein, wenn man die Constanten τ und $1+4\pi\varkappa$ identificirt, während die für die magnetische Potentialfunction an Unstetigkeitsflächen geltende Stetigkeitsbedingung $\varphi_1=\varphi_2$ als Specialfall der Gleichung (221a) $\varphi_2-\varphi_1=E_{12}$ erscheint. Die Analogie bleibt aber auch bestehen, wenn man permanente Magnete und Leiter mit elektromotorischen Kräften mit einander in Parallele stellt, nur mufs man, da wir für die Magnete $\varkappa=0$ setzen, dabei $\tau=1$ wählen. Dann entsprechen die Gleichungen (222b) in der vereinfachten Form

$$\Delta\varphi=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}=\delta_{n_1}+\delta_{n_2}$$

bis auf den Factor 4π der für die Magneten gültigen Beziehung (193) und (193a)

$$\Delta\varphi=4\pi\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}=4\pi\sigma_{n_1}.$$

Der scheinbare Unterschied zwischen den Grenzbedingungen rührt nur von der Annahme her, dafs sich in permanenten Magneten keine Unstetigkeitsflächen befinden.

Eine Folge hiervon ist, dafs wir das Brechungsgesetz der Kraftlinien an der Grenze temporär magnetisirbarer Medien unmittelbar auf die Stromlinien übertragen können, welche die Berührungsfläche homogener Leiter passiren, sofern in ihnen keine elektromotorischen Kräfte auftreten. Bezeichnet ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, welche sie auf den beiden Seiten der Fläche mit den Normalen bilden, so ist [siehe (206)]

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 : \operatorname{tg} \vartheta_1 = \tau_2 : \tau_1 .$$

Nun kann das Verhältnifs $\tau_2 : \tau_1$ viele Zehnerpotenzen betragen, wenn der zweite Körper ein Metall, der erste ein Elektrolyt ist; dann ist nach dieser Gleichung $\operatorname{tg} \vartheta_1$ so klein, dafs ϑ_1 fast gleich 0, d. h. die Stromlinie senkrecht zur Grenzfläche wird; ausgenommen den Fall, dafs $\operatorname{tg} \vartheta_2$ sehr grofs, der Strom also im Metall fast parallel zur Grenzfläche fliefst. Man kann in Folge dessen für den ersten Leiter die Grenzfläche nahezu als Potentialniveaufläche betrachten, wodurch die mathematische Behandlung vieler Probleme unseres Gebietes wesentlich erleichtert wird (siehe § 60).

Eine weitere Folge dieser Analogie ist, dafs wir die oben behandelten Fragen nach der Beeinflussung eines ursprünglich homogenen magnetischen Feldes durch eine hineingebrachte magnetisirbare Kugel oder ein Ellipsoid unmittelbar umdeuten können in die Probleme, wie sich die Stromvertheilung ändert, wenn man in einem unendlich ausgedehnten, von gleichmäfsig vertheiltem Strom durchflossenen Leiter eine Kugel oder ein Ellipsoid aus anderem Material hineinbringt. Der dabei zu erfüllenden Oberflächenbedingung

$$\varphi_i - \varphi_a = \text{const},$$

welche an die Stelle der Stetigkeitsbedingung

$$\varphi_i - \varphi_a = 0$$

tritt, genügt man, wenn man zu φ_i noch diese Constante hinzufügt.

Es mag schon an dieser Stelle bemerkt werden, dafs das Ohm'sche Gesetz — Proportionalität zwischen der Stromdichte und der Resultante aus Feldstärke und elektromotorischer Kraft — ganz allgemein gilt, allgemeiner noch als die hier angewandte Formulirung, welche die Existenz einer Potentialfunction voraussetzt.

§ 59. Stromstärke und elektrischer Widerstand. Stromvertheilung in verzweigten Leitersystemen.

Im Allgemeinen kann ein stationärer Strom auch dann bestehen, wenn das Leitersystem einen einfach zusammenhängenden Raum erfüllt, d. h. einen solchen, welcher durch einen Querschnitt in zwei

vollständig getrennte Theile zerlegt wird. Berühren sich z. B. in der durch den Punkt A in der Figur 19 angedeuteten Linie drei verschiedene Körper, so wird diese im Allgemeinen von einem Strom umkreist. Bildet man dann für irgend einen Querschnitt des stromdurchflossenen Systems das Integral $\iint q_n\, ds$, so mufs man nach (218) den Werth 0 erhalten, da dieser zusammen mit der einen oder anderen Hälfte der Grenze gegen die nichtleitende Umgebung eine geschlossene Oberfläche bildet.

Wir wollen, um solche Fälle auszuschliefsen, im Folgenden voraussetzen, dafs das stromführende Gebiet einen mindestens zweifach zusammenhängenden Raum bildet, d. h. dafs zwei oder mehr Querschnitte nothwendig sind, um ihn in vollständig getrennte, einfach zusammenhängende Theile zu zerlegen. Das erstere ist z. B. der Fall, wenn man ein galvanisches Element durch einen Draht schliefst, das letztere, wenn dieser selbst noch Abweigungen besitzt, wie etwa bei der WHEATSTONE'schen Brücke. Ferner wollen wir uns auf den in diesem Beispiel schon realisirten Fall beschränken, dafs nur Trennungsflächen homogener Leiter als Sitz der elektromotorischen Kraft in Betracht kommen, und dafs jede von ihnen einen Querschnitt des leitenden Systems darstellt. Dafs sich mehr als zwei verschiedene Körper in einer Linie berühren, ist hiernach ausgeschlossen.

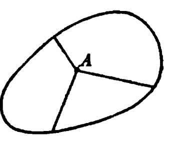


Fig. 19.

Bilden wir nun das Integral $\overline{\iint} q_{n_i}\, ds$ für eine geschlossene Fläche, welche aus zwei Querschnitten eines unverzweigten Leiterstücks und aus dem dazwischen liegenden Theil der Oberfläche besteht, so müssen nach (218) die auf die Querschnitte bezüglichen Theile davon einander entgegengesetzt gleich sein; legt man daher die Normale des einen nicht in das Innere des eingeschlossenen Raumes, sondern nach Aufsen, so haben die Integrale

$$\iint q_n\, ds = I \tag{224}$$

für beide denselben Werth, den wir durch passende Wahl der Richtung von n stets positiv machen können. I ist eine von der Wahl des Querschnitts unabhängige, positive Gröfse, die Stromstärke. $I\,dt$ ist nach der Definition der Stromdichte q die den Querschnitt in der Zeit dt passirende Elektricitätsmenge.

Wir wenden diesen Begriff zunächst auf einen linearen Leiter an, d. h. einen solchen, welcher den folgenden Bedingungen genügt:

Seine Länge und sein Krümmungsradius mufs gegen die Querdimensionen grofs, seine Leitfähigkeit auf jedem senkrechten Querschnitt Q constant sein. Q selbst darf zwar veränderlich sein, aber nur so langsam, dafs die Strömung überall als parallel der Axe des Leiters betrachtet werden kann. Dann ist die Stromdichte auch auf den Querschnitten Q constant, während die Niveauflächen der Potentialfunction mit ihnen zusammenfallen. Dasselbe soll von etwa vorhandenen elektromotorisch wirksamen Flächen gelten, ihre Existenz ändert dann nichts daran, dafs alle Zustandsgröfsen nur Functionen der von einem beliebigen Anfang gemessenen Länge l des Leiters sind. Ein linearer Leiter ist mithin annähernd eine einzelne Stromröhre.

Für ein von zwei Querschnitten mit den Potentialen φ_1 und φ_2 begrenztes Stück eines linearen Leiters berechnen wir nun $\int \frac{q_l}{\tau} dl$; nach (221) ist

$$\int_1^2 \frac{q_l}{\tau} dl = \varphi_1 - \varphi_2 + E,$$

wenn wir unter $+E$ das der vorhandenen elektromotorischen Flächen wegen im Allgemeinen von 0 verschiedene Integral $\int_1^2 \delta_l \, dl$ verstehen. Nun reducirt sich aber für einen linearen Leiter Gleichung (224) auf

$$q_l = \frac{I}{Q},$$

und I ist von l unabhängig, so dafs

$$I \int_1^2 \frac{dl}{\tau Q} = \varphi_1 - \varphi_2 + E \tag{225}$$

wird; d. h. die Stromstärke ist in einem linearen Leiter proportional der Potentialdifferenz an seinen Enden, vermehrt um die Summe der an den elektromotorisch wirksamen Flächen stattfindenden Potentialsprünge. Den nur von den Dimensionen und der Leitfähigkeit abhängenden Proportionalitätsfactor

$$w = \int_1^2 \frac{dl}{\tau Q} \tag{225a}$$

nennt man den elektrischen Widerstand des Leiters. In dieser Gleichung und in der Beziehung

$$I w = \varphi_1 - \varphi_2 + E \tag{225 b}$$

spricht sich das OHM'sche Gesetz in seiner elementaren, auf lineare Leiter und stationäre Ströme bezogenen Form aus. Für einen homogenen Draht von constantem Querschnitt und der Länge l ist

$$w = \frac{l}{\tau Q}.$$

Aus (225a) folgt vermöge der Identität

$$\int_1^2 \frac{dl}{\tau Q} + \int_2^3 \frac{dl}{\tau Q} = \int_1^3 \frac{dl}{\tau Q},$$

dafs sich die Widerstände hinter einander geschalteter Drähte addiren; eine Serie von n hinter einander liegenden Drahtstücken hat den Widerstand

$$w = \sum w_n.$$

Liegen dagegen die Enden mehrerer Drähte, für welche E denselben Werth hat, auf denselben zwei Niveauflächen $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$, so gilt nach (225 b) für die Stromstärke I_n und den Widerstand w_n in jedem von ihnen die Gleichung:

$$I_n = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E}{w_n},$$

für den gesammten durch sie fliefsenden Strom

$$I = \sum I_n,$$

also

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + E) \sum \frac{1}{w_n}.$$

Diese Gleichung nimmt die Form der Gleichung (225 b), nämlich

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E}{w}$$

an, wenn man

$$\frac{1}{w} = \sum \frac{1}{w_n}$$

setzt. Nach dieser Formel berechnet sich der Gesammtwiderstand einer Gruppe parallel geschalteter Drähte; da die w_n nothwendig positiv sind, ist w kleiner als jedes w_n.

Als ein System parallel geschalteter, diesen Bedingungen genügender linearer Leiter, nämlich als ein System von Stromröhren, läfst sich nun jedes zwischen zwei Niveauflächen gelegene Stück eines leitenden Körpers betrachten, wenn diese keine der elektromotorisch wirksamen Flächen schneiden. Es mufs also auch hier eine Beziehung

$$I w = \varphi_1 - \varphi_2 + E$$

bestehen, welche den Widerstand w des betrachteten Körpers definirt. Zu seiner Berechnung bedarf man aber der Kenntnifs von Lage und Form der beiden Niveauflächen, welche bei geometrisch gleichen Körpern noch sehr von der Art der Zuleitungen des Stromes abhängt. Der Widerstand einer metallischen Kugel z. B., der man den Strom durch zwei angelöthete Drähte zuführt, variirt stark mit der relativen Lage, der Gröfse und Form der Löthstellen. Nur beim linearen Leiter fällt diese Unbestimmtheit fort, weil man bei ihm stets die senkrechten Querschnitte als Niveauflächen betrachten kann; aber auch einem galvanischen Element z. B., dessen Polklemmen fest angebracht sind, hat man einen bestimmt angebbaren Widerstand zuzuschreiben.

Aus den Gleichungen (218) und (225 b) leiten sich unmittelbar die Kirchhoff'schen Gesetze der Stromvertheilung in einem beliebig verzweigten System linearer Leiter ab; falls diese sich zu räumlichen ausgedehnten Leitern erweitern, so kommt dies hier nicht in Betracht, wenn nur durch die Linearität der Stromzuführungen die soeben besprochene Unbestimmtheit aufgehoben ist. Die Verknüpfungspunkte zweier oder mehrerer Drähte bezeichnen wir mit $a, b, c \ldots$; je zwei von ihnen sollen durch eine beliebige Zahl von Drähten mit einander verbunden sein, im $n$ten von diesen fliefst von b nach a ein Strom von der Stärke $I_{ab}^{(n)}$, er passirt dabei elektromotorische Flächen, an denen die Potentialsprünge zusammen $E_{ab}^{(n)}$ betragen und hat den elektrischen Widerstand $w_{ab}^{(n)}$ zu überwinden. Man sieht, dafs nach diesen Definitionen

$$I_{ab}^{(n)} = - I_{ba}^{(n)}, \quad E_{ab}^{(n)} = - E_{ba}^{(n)}, \quad w_{ab}^{(n)} = w_{ba}^{(n)}$$

ist. Gleichung (218), angewandt auf die Umgebung des Knotenpunktes a, sagt nun aus:

$$\sum\nolimits^b \sum\nolimits^n I_{ab}^{(n)} = 0 \tag{226}$$

und Gleichung (225 b) liefert in Anwendung auf die $n$te Verbindung der Punkte (a) und (b):

$$I_{ab}^{(n)} w_{ab}^{(n)} = \varphi_b - \varphi_a + E_{ab}^{(n)}. \tag{226a}$$

Als bekannt werden alle Widerstände und Potentialsprünge angenommen, also die Gröfsen $w_{ab}^{(n)}$ und $E_{ab}^{(n)}$; zu ermitteln sind die Unbekannten $I_{ab}^{(n)}$ und φ_a, φ_b .... Ihre Anzahl ist gleich der Zahl der Drähte plus der der Knotenpunkte. Dafür giebt es aber auch soviel Gleichungen (226a) wie Drähte, und soviel Gleichungen (226) als Knotenpunkte, nur sind die letzteren nicht von einander unabhängig. Vielmehr geht eine von ihnen vermöge der Identitäten $I_{ab}^{(n)} = - I_{ba}^{(n)}$ aus der Summation der anderen hervor; denn hat man für alle Knotenpunkte mit einer einzigen Ausnahme ausgesprochen, dafs sich in ihnen keine Elektricität anhäuft, so ist dies für den letzten selbstverständlich. In Folge dessen bleibt eine Unbekannte unbestimmt und nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen allgemeinen Theorem ist dies einer der Werthe φ_a. Denn durch gegebene geometrische Verhältnisse und Leitfähigkeiten, d. h. Widerstände, und gegebene elektromotorische Kräfte ist zwar die Stromdichte, also auch die Stromstärke, eindeutig, die Potentialfunction aber nur bis auf eine Constante bestimmt.

Die Kirchhoff'schen Regeln enthalten unmittelbar die Theorie der zur Vergleichung von Widerständen und elektromotorischen Kräften dienenden Wheatstone'schen Brücke. Da in ihnen nur die Producte Iw auftreten, braucht man den Widerstand des Galvanometerzweiges, auf dessen Stromlosigkeit eingestellt wird, nicht zu kennen.

§ 60. Beispiele für die Berechnung des Widerstandes räumlich ausgedehnter Leiter.

Bekanntlich dient in der Telegraphie zur Rückleitung des elektrischen Stromes die Erde, in welche man an den Telegraphenstationen metallische Elektroden versenkt. Wir wollen den Widerstand dieser Rückleitung berechnen; nach den Erörterungen des vorhergehenden Paragraphen haben wir dabei einen weitgehenden Einflufs von Form und Gröfse der Elektroden zu erwarten. Freilich müssen wir, um die Aufgabe überhaupt stellen zu können, die Leitfähigkeit des Erdkörpers als überall constant ansehen; ferner wollen wir (was wenig ausmacht) die Erdoberfläche als Ebene betrachten.

Als Elektroden denken wir uns zunächst zwei metallische Kugeln vom Radius R, welche zur Hälfte in der Erde stecken. Ihre Leitfähigkeit ist gegen die der Erde so grofs, dafs man ihre Ober-

flächen nach § 58 als Niveauflächen betrachten kann. Die Potentialfunction φ mufs dann in der Erde der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, an den beiden Halbkugelflächen der Bedingung $\varphi =$ const und an der Erdoberfläche, d. h. einer durch die Kugelmittelpunkte gehenden Ebene der Gleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ genügen. Dazu tritt noch die Forderung, dafs der durch die eine Kugel eintretende Strom gleich dem durch die andere austretenden sein soll; d. h. bilden wir das Integral

$$\iint q_{n_a} ds = -\tau \iint \frac{\partial\varphi}{\partial n_a} ds$$

für die beiden Halbkugelflächen, so müssen wir entgegengesetzt gleiche Werthe erhalten.

Wir wollen die Rechnung nur für den Fall durchführen, dafs die Kugeln soweit von einander entfernt sind, dafs keine die Stromvertheilung in der Umgebung der anderen mehr beeinflufst; dann können wir den Ansatz

$$\varphi = \alpha\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{227}$$

machen, wo r_1, r_2 die Abstände eines Punktes von den Mittelpunkten der Kugeln bedeuten; α ist eine Constante. Die Bedingung $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ ist aus Symmetrie für jede die beiden Kugelmittelpunkte enthaltende Ebene erfüllt, und aus der Art, wie r_1 und r_2 auftreten, geht unmittelbar hervor, dafs $\iint \frac{\partial\varphi}{\partial n_a} ds$ für beide Flächen entgegengesetzt gleiche Werthe annimmt. Der Oberflächenbedingung $\varphi =$ const ist insofern genügt, als $\frac{\alpha}{r_1}$ auf der zweiten, $\frac{\alpha}{r_2}$ auf der ersten Kugelfläche vernachlässigt werden kann; die Potentialfunction hat hier die Werthe:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{R}$$

und

$$\varphi_2 = -\frac{\alpha}{R}.$$

Die Potentialdifferenz zwischen beiden Kugeln ist also

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\alpha}{R},$$

und die Stromstärke beträgt

$$I = -\tau \iint ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = -\alpha \tau \iint \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial r_1} ds = \frac{\alpha \tau}{R^2} \iint ds,$$

wo die Integration über die halbe Fläche der ersten Kugel auszuführen ist; also

$$I = 2 \pi \alpha \tau;$$

der Widerstand w der Erdleitung ist demnach

$$w = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{1}{\pi \tau R},$$

also unabhängig vom Abstand der Elektroden und umgekehrt proportional zu ihrem Radius.

Besonders deutlich tritt der Einfluſs der Elektroden hervor, wenn man ihre Form ändert und z. B. zwei lange, senkrecht im Boden steckende Drähte zur Stromzuführung verwendet. Ein solcher Draht läſst sich annähernd als Rotationsellipsoid mit einem Werthe von σ, welcher nur wenig gröſser als 1 ist, betrachten, denn im Grenzfall $\sigma = 1$ geht das durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \sigma^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2(\sigma^2 - 1)} = 1$$

dargestellte Ellipsoid in die Verbindungslinie der Punkte $x = \pm a$ über. Wir stellen daher unsere Frage zunächst für den Fall zweier gleicher verlängerter Rotationsellipsoide. welche mit der ausgezeichneten Axe senkrecht und genau zur Hälfte im Erdboden stecken. Der Grenzbedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ für die Erdoberfläche ist dann wiederum durch Symmetrie genügt.

Bezeichnen wir mit σ_1, τ_1, ϑ_1 die auf das erste Ellipsoid bezogenen elliptischen Coordinaten eines Punktes, mit σ_2, τ_2, ϑ_2 die analogen, auf das andere Ellipsoid bezogenen Gröſsen, so entspricht dem Ansatz (227) die Gleichung:

$$\varphi = \alpha \left(\log \frac{\sigma_1 + 1}{\sigma_1 - 1} - \log \frac{\sigma_2 + 1}{\sigma_2 - 1} \right); \tag{228}$$

denn daſs hier $\Delta \varphi = 0$, folgt aus § 45a Gleichung (177b). Da wir ferner auch hier den Abstand als praktisch unendlich groſs betrachten wollen, ist der erste dieser Terme auf dem zweiten, der

zweite auf dem ersten Ellipsoid zu vernachlässigen; und auch hier erkennt man ohne weitere Rechnung, daſs $\int\int \frac{\partial \varphi}{d n_a} ds$ für die in der Erde steckenden Hälften der beiden Ellipsoidoberflächen bis auf's Vorzeichen gleiche Werthe ergiebt.

Sind $\sigma_1 = \sigma'$ und $\sigma_2 = \sigma'$ die Gleichungen dieser Oberflächen, so ist

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\alpha \log \frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1}$$

die Potentialdifferenz zwischen ihnen.

Zur Berechnung der Stromstärke könnten wir ebenso verfahren wie oben und das Integral $-\tau\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} ds$ für die Fläche der ersten Elektrode berechnen. Bequemer ist es aber, für eine andere Fläche diese Integration auszuführen; diese muſs nur die beiden Ellipsoide von einander trennen. Wir wählen zweckmäſsig dazu die in der Erde liegende Hälfte einer um den Mittelpunkt des ersten Ellipsoides beschriebenen Kugel von dem sehr groſsen Radius R. Diese läſst sich nach den Erörterungen in § 53 als ein Ellipsoid mit dem sehr groſsen Werth $\sigma_1 = \frac{R}{a}$ auffassen; denn $a\sigma_1$ ist im Unendlichen der Abstand vom Mittelpunkt des Ellipsoides. Der eine Summand in Gleichung (228), $\alpha \log \frac{\sigma_1 + 1}{\sigma_1 - 1}$, geht auf ihr über in

$$\frac{2\alpha}{\sigma_1} = \frac{2\alpha a}{R},$$

während der andere nicht berücksichtigt zu werden braucht. Denn er ist die Potentialfunction einer auf dem zweiten, von der Kugel ausgeschlossenen Ellipsoid liegenden Ladung, und da $-\int\int ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_a}$, erstreckt über die ganze Kugel, die von ihr umschlossene Ladung miſst [siehe § 22 Gleichung (78d)], so ist der Theil dieses Integrals Null, welcher von der erstgenannten Ladung herrührt. Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für unser nur über die Halbkugel zu bildendes Integral. Also ist

$$I = -\tau\int\int ds \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = -2\alpha a \tau \int\int ds \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial R} = 4\pi\alpha a \tau$$

und der Widerstand

$$w = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{1}{2\pi a \tau} \log \frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1}.$$

Die Länge der halben Rotationsaxe des Ellipsoides beträgt $a\sigma'$, die der beiden anderen Halbaxen $a\sqrt{\sigma'^2 - 1}$. Läfst man das Ellipsoid zum Draht ausarten, indem man σ' bis nahe an den Werth 1 abnehmen läfst, so wird a die Länge des in die Erde versenkten Drahtstückes, $a\sqrt{\sigma'^2 - 1}$ sein Radius ϱ, und man kann angenähert

$$\frac{\sigma' + 1}{\sigma' - 1} = \frac{a^2(\sigma' + 1)^2}{a^2(\sigma'^2 - 1)} = \frac{4a^2}{\varrho^2}$$

setzen. Dann wird

$$w = \frac{1}{\pi \tau a} \log \frac{2a}{\varrho};$$

der Widerstand nimmt also schliefslich über alle Grenzen zu, wenn man bei constanter Länge den Durchmesser immer geringer wählt; er sollte sich dagegen bei gegebenem Querschnitt durch Verlängerung des Drahtes nach dieser Formel unter jeden Werth herabdrücken lassen. Man mufs aber bedenken, dafs man a nicht immer weiter wachsen lassen kann, ohne an eine Grenze zu kommen, an welcher die physikalische Bedeutung unserer Lösung aufhört; denn einmal kann bei extrem langen Drähten auch bei noch so grofsem Unterschied der Leitfähigkeiten die Oberfläche nicht mehr als Niveaufläche gelten (vgl. § 58), und zweitens mufs a gegen den Abstand der Drähte klein bleiben, weil nur unter dieser Voraussetzung unser Ansatz für φ der Bedingung $\varphi = \text{const}$ auf ihnen genügt.

§ 61. Der Energieumsatz stationärer Ströme. Dimensionen.

Wir fanden in § 54, dafs die Energie eines Condensators von der Capazität C

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}$$

ist, wenn $\pm e$ die Ladungen der beiden Platten sind. Stellt man zwischen diesen eine leitende Verbindung her, so entsteht in ihr unter dem Einflufs ihrer Potentialdifferenz

$$P_1 - P_2 = \frac{e}{C}$$

ein elektrischer Strom, dessen Stärke I sich durch Vergröfserung des Widerstandes beliebig herabsetzen läfst. Da aber nach der Definition der Stromstärke

$$I = - \frac{d\mathfrak{e}}{dt}$$

ist, verändern sich dann Ladung und Potentialdifferenz schliefslich so langsam, dafs man den Strom für beträchtliche Zeiträume als stationär betrachten kann, obwohl er ja schliefslich mit verschwindender Ladung erlöschen mufs. Die elektrische Energie nimmt in der Zeit dt um

$$- \frac{dW}{dt} dt = - \frac{\mathfrak{e}}{C} \frac{d\mathfrak{e}}{dt} dt = (P_1 - P_2) I\, dt$$

ab; dasselbe Energiequantum mufs dem Energieprincip zu Folge irgendwo in anderer Form wieder auftauchen. Erfahrungsgemäfs entsteht es in der leitenden Verbindung und zwar, wenn diese homogen ist, als JOULE'sche Wärme.

Schliefsen wir nun von diesem mit beliebiger Annäherung stationär zu machenden Strom auf einen streng stationären. Für den Theil einer Stromröhre, welcher von den (nicht nothwendig senkrechten) Querschnitten ds_1 und ds_2 begrenzt wird, ist die Stromstärke gleich

$$q_{n_1} ds_1 = q_{n_2} ds_2\,;$$

dem Betrage $(P_2 - P_2) I$, entspricht für sie also der Ausdruck

$$\varphi_1 q_{n_1} ds_1 - \varphi_2 q_{n_2} ds_2 = [\varphi\, q_{n_i} ds]_1 + [\varphi\, q_{n_i} ds]_2 \,.$$

Für ein beliebig begrenztes Raumstück folgt daraus durch Summation über alle Stromröhren

$$J = \overline{\iint} ds\, \varphi\, q_{n_i} \tag{229}$$

als der Betrag der in der Zeiteinheit in nicht-elektrischer Form entstehenden Energie.

Nach dem GREEN'schen Satz und nach Gleichung (218a) ist nun

$$0 = \iiint \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= - \iiint \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz - \iint ds\, \varphi\, q_{n_i},$$

wobei das Flächenintegral nicht nur über die Begrenzung des Integrationsraumes, sondern auch über die etwa vorhandenen Unstetigkeitsflächen von φ zu bilden ist. Da an den letzteren q_{n_i} für beide Seiten entgegengesetzte gleiche Werthe hat, so wird nach (229) und (221a)

$$J = -\iiint\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz - \iint ds\,E_{12}\,q_n, \tag{229a}$$

wenn die Normale n als vom Körper 1 nach 2 weisend angenommen wird. Andere Formen derselben Gleichung, die man erhält, wenn man an Stelle der Potentialfunction die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ oder nach (221) die elektromotorische Kraft δ einführt, sind

$$J = \iiint q\,\mathfrak{E}\cos(q\,\mathfrak{E})\,dx\,dy\,dz - \iint ds\,E_{12}\,q_n \tag{229b}$$

und

$$J = \iiint\left(\frac{q^2}{\tau} - q\,\delta\cos(q\,\delta)\right)dx\,dy\,dz - \iint ds\,E_{12}\,q_n\,. \tag{229c}$$

In Anwendung auf das ganze stromführende Leitersystem sagt Gleichung (229) aus: $J = 0$, da an seiner Grenze $q_{n_i} = 0$ ist; der Strom vermittelt also nur zwischen verschiedenen Theilen des leitenden Systems einen Energietransport, er führt aber von Aufsen keine Energie hinein. Wären keine elektromotorischen Kräfte vorhanden, so würde aber $J = 0$ nach (229c) $q = 0$ fordern; wir finden hier also bestätigt, dafs elektromotorische Kräfte zur Erhaltung stationärer Strömung nothwendig sind; sie müssen die Energie produciren, welche der Strom als Joule'sche Wärme über das leitende System verteilt; nur wo $\cos(q\,\mathfrak{E}) < 0$, wo die Strömung also vom niederen zum höheren Potential führt, haben in 229b die Integranden $q\,\mathfrak{E}\cos(q, \mathfrak{E})$ und $-E_{12}\,q_n = (\varphi_1 - \varphi_2)\,q_n$ die negativen Werthe, welche wegen $J = 0$ im vollständigen Stromgebiet vorkommen müssen.

Wir unterscheiden in Gleichung (229c) die beiden Summanden

$$J_1 = \iiint\frac{q^2}{\tau}\,dx\,dy\,dz, \tag{229d}$$

welcher unabhängig von der Stromrichtung stets positiv ist, und

$$J_2 = -\iiint q\,\delta\cos(q, \delta)\,dx\,dy\,dz - \iint ds\,E_{12}\,q_n, \tag{229e}$$

welcher bei Umkehrung der Stromrichtung sein Zeichen wechselt. J_1 ist die Joule'sche Wärme; für einen linearen Leiter, bei dem

$dx\,dy\,dz = Q\,dl$ und $q = \frac{I}{Q}$ ist, berechnet sie sich nach (225a) und (225b) aus der Gleichung

$$J_1 = I^2 \int_1^2 \frac{dl}{\tau Q} = I^2 w = I(\varphi_1 - \varphi_2 + E);$$

für ein System parallel geschalteter linearer Leiter, für welche $\varphi_1 - \varphi_2 + E$ denselben Werth hat (vgl. § 59), ist aber die gesammte JOULE'sche Wärme

$$J_1 = (\varphi_1 - \varphi_2 - E) \sum I_n = I(\varphi_1 - \varphi_2 - E) = I^2 w, \qquad (229f)$$

daher gilt diese Formel auch für körperlich ausgedehnte Leiter, natürlich mit den Beschränkungen, unter welchen wir bei ihnen von Stromstärke und Widerstand überhaupt nur reden können. In der Gleichung für J_2 stellt das Flächenintegral $-\iint ds\, E_{12}\, q_n$ ein an Unstetigkeitsflächen freiwerdendes oder verbrauchtes Energiequantum dar, welches als Peltierwärme und, wenn mindestens der eine Leiter ein Elektrolyt ist, auch als die zu chemischen Umsetzungen nöthige Energie auftritt; das Raumintegral $-\iiint q\,\delta \cos(q\,\delta)\, dx\,dy\,dz$ weist auf die in elektrolytischen Lösungen mit dem Stromdurchgang verknüpften Concentrationsänderungen und auf den in chemisch homogenen, aber ungleich temperirten Metallen auftretenden Thomsoneffect hin.

Wir schliefsen diesen Paragraphen mit der Ableitung eines Reciprocitätssatzes. In einem leitenden System ohne locale elektromotorische Kräfte liege eine Anzahl elektromotorisch wirksamer Flächen α, β, γ ... mit den Potentialsprüngen E_α, E_β, E_γ ...; jede von ihnen möge für sich allein die Stromdichte q_α, q_β, q_γ hervorrufen, die zugehörigen Potentialfunctionen sollen φ_α, φ_β ... sein. Die gesammte Stromdichte ist nach dem Superpositionsprincip $q_\alpha + q_\beta + q_\gamma$ ... Wir berechnen nun nach dem GREEN'schen Satz das über das ganze Stromgebiet auszuführende Integral

$$\iiint \tau \left\{ \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z} \right\} dx\,dy\,dz,$$

welches wegen (221a) sowohl gleich dem für die Fläche α zu bildenden Integral $-\iint_\alpha ds\, E_\alpha\, q_{\beta n}$, als auch gleich dem entsprechen-

den Integral für β, $-\iint\limits_{\beta} ds\, E_\beta\, q_{\alpha\, n}$ ist. Dies sind aber die Energiebeträge, welche einerseits der von α erzeugte Strom an β, andererseits der von β hervorgerufene an α als Peltierwärme absetzt. Die von der einen Fläche der anderen zugesandten Energiemengen sind also gleich.

Was die Dimensionen der in diesem Abschnitt neu eingeführten Gröfsen anbelangt, so ist $I\,dt$ nach § 59 eine Elektricitätsmenge, also

$$I = [M^{\frac{1}{2}}\, L^{\frac{3}{2}}\, T^{-2}];$$

die Stromdichte q ist beim linearen Leiter gleich $\frac{I}{Q}$, demnach

$$q = [M^{\frac{1}{2}}\, L^{-\frac{1}{2}}\, T^{-2}].$$

$J_1 = I^2 w$ ist nach (229 f) die pro Zeiteinheit entwickelte Joule'sche Wärme, daraus folgt für den Widerstand:

$$w = [L^{-1}\, T],$$

und da endlich beim linearen homogenenen Leiter von constantem Querschnitt nach (225 a) $w = \frac{l}{\tau\, Q}$, so ist die Leitfähigkeit

$$\tau = [T^{-1}].$$

Dritter Theil.

Elektromagnetische Wechselwirkungen.

Erster Abschnitt.

Das magnetische Feld stationärer elektrischer Ströme.

---

§ 62. Das magnetische Feld linearer Ströme, dargestellt mit Hülfe Ampère'scher Flächen.

In dem vorhergehenden Abschnitt haben wir nur das elektrische Feld stationärer Ströme besprochen. Wie zuerst Örsted und Ampère fanden, üben solche aber auch magnetische Wirkungen aus.

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse beim linearen Strom, in dessen Umgebung sich zunächst weder ein permanenter Magnet noch ein magnetisirbarer Körper befinden soll. Er wird von geschlossenen magnetischen Kraftlinien umkreist; sind in Figur 20 die Punkte 1 und 2 die Durchstoſspunkte des Stromkreises durch die Zeichenebene, und flieſst der Strom in 1 von unten nach oben, in 2 dagegen von oben nach unten, so geben die um

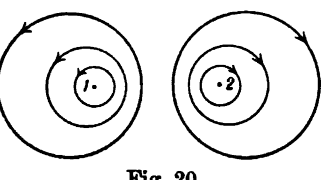


Fig. 20.

sie herum geführten, mit Richtungssinn versehenen Curven qualitativ den Verlauf der Kraftlinien an. Wie man aus ihr sieht, läſst sich der Richtungssinn der Umkreisung durch die Ampère'sche Regel angeben, welche aussagt, daſs ein in Richtung des elektrischen Stroms Schwimmender die magnetischen Kraftlinien von rechts nach links vor sich vorüberziehen sieht.

Ein magnetisches Feld mit geschlossenen Kraftlinien läſst sich nicht durch eine Potentialfunction darstellen; das letztere ist nur möglich, wenn das Linienintegral der Kraft für jede geschlossene

Curve verschwindet. Hier ist es aber offenbar von Null verschieden, wenn man es für eine der geschlossenen Kraftlinien bildet. Nun wollen wir aber zunächst einmal festsetzen, dafs wir nur solche geschlossene Curven in Betracht ziehen, welche eine bestimmte, vom Stromkreis umrandete, sonst aber beliebig ausgewählte Fläche nicht durchsetzen. Die Erfahrung zeigt, dafs für alle diese das Linienintegral Null ist. Nun macht aber die genannte Fläche — man nennt sie die AMPÈRE'sche — aus dem den Stromkreis umgebenden zweifach zusammenhängenden Raum einen einfach zusammenhängenden. In dem letzteren können wir also die magnetische Kraft wiederum aus einer Potentialfunction ableiten. An der AMPÈRE'schen Fläche findet dabei natürlich ein Potentialsprung statt; die fragliche Potentialfunction ist also die einer Doppelschicht. Nun ist die Kraft an diesem physikalisch gar nicht vorhandenen Gebilde selbstverständlich ebenso stetig, wie an anderen Stellen des Raumes. Nach § 19 hätte eine Doppelfläche von veränderlichem Moment aber Unstetigkeit der Tangentialcomponenten zur Folge. Der lineare elektrische Strom ist also einer Doppelfläche von constantem Moment äquivalent.

Nur in einem Punkte versagt die Aequivalenz. Stellt man sich die Doppelschicht als aus zwei entgegengesetzt gleich geladenen Flächen bestehend vor, so findet man für das Linienintegral der magnetischen Kraft auch dann den Werth 0, wenn der geschlossene Integrationsweg die Fläche durchsetzt. Das Curvenstück zwischen den Belegungen compensirt alle übrigen, denn wenn man die Belegungen bei constantem Moment immer näher an einander rücken läfst, so nimmt auch die Kraft in dem Zwischenraume über alle Grenzen zu. Dagegen ist die Feldstärke in der AMPÈRE'schen Fläche natürlich ebenso wie sonst im Raum endlich. Will man also die Beziehung, dafs die Differenz der Potentialwerthe im Anfangs- und Endpunkt dem Linienintegral der Kraft gleich ist, beim linearen Strom allgemein aufrecht erhalten, so mufs man jedesmal, wenn der Integrationsweg die AMPÈRE'sche Fläche durchsetzt, zur Potentialfunction eine Constante hinzufügen, welche dem an ihr stattfindenden Potentialsprung an Gröfse gleich ist; welches Vorzeichen man ihr zu geben hat, hängt von dem Sinn ab, in welchem man die Fläche durchschreitet. Dann wird die Potentialfunction zwar überall stetig, aber um ganze Vielfache dieser Constanten mehrdeutig. Wir werden im Folgenden der eindeutigen Potentialfunction der äquivalenten Doppelschicht meist den Vorzug geben; da wir diese, abgesehen von der Randcurve, beliebig wählen können, dürfen wir den Punkt,

in welchem wir das magnetische Feld untersuchen, stets als aufserhalb der Fläche befindlich ansehen.

Die Potentialfunction einer Doppelfläche haben wir schon in § 19 berechnet; wir wollen sie aber, um einen anderen Weg kennen zu lernen, hier noch einmal aus dem GREEN'schen Satz ableiten. Da magnetische Ladungen nirgends auftreten, mufs sie überall der Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = 0$$

genügen und abgesehen von dem Sprung an der Doppelfläche, den wir in Anschlufs an früher gebrauchte Bezeichnungen mit $4 \pi \mathfrak{M}$ bezeichnen, endlich und stetig sein. Das letztere gilt auch für ihre Ableitungen, freilich mit Ausnahme der vom elektrischen Strom durchflossenen Curve. Denn berechnen wir das Linienintegral der magnetischen Kraft für einen Kreis vom kleinen Radius ϱ, dessen Mittelpunkt in der Stromcurve liegt und dessen Ebene zu der Richtung der Curve in diesem Punkt senkrecht ist, so mufs man nach dem Gesagten den allen die Stromcurve umschlingenden Integrationswegen gemeinsamen, also von ϱ unabhängigen Werth finden. Dazu ist erforderlich, dafs die in der Peripherie liegende Componente der Kraft mit abnehmendem ϱ wächst wie $\frac{1}{\varrho}$. Dagegen bleibt die in Richtung von ϱ weisende Componente endlich und stetig; bilden wir nämlich für die Oberfläche eines die Stromcurve umgebenden Fadens vom Radius ϱ das Flächenintegral

$$\overline{\iint} d s \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = \overline{\iint} d s \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho},$$

so mufs es, da die Stromcurve wegen der Aequivalenz des Stromes mit einer Doppelfläche keine magnetische Ladung trägt, Null sein. Würde aber $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ für sehr kleine Werthe von ϱ sehr grofs, so müfste es für die ganze Fadenfläche aus Symmetrie dasselbe Vorzeichen haben, das Integral wäre also sicher von Null verschieden. Daraus ist zu schliefsen, dafs $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ auch bei beliebiger Annäherung an die Stromcurve endlich bleibt. Schliefslich mufs φ im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{R}$ Null werden, seine Ableitungen mindestens wie $\frac{1}{R^2}$.

Wir wenden die GREEN'sche Umformung auf das über den gesammten Raum gebildete Integral

$$\iiint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

an, wo

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

ist; auszuschließen sind nur die Unstetigkeitsstellen der Functionen φ und $\frac{1}{r}$ und ihrer Ableitungen. Dementsprechend sind als Grenzen des Integrationsgebietes zu betrachten 1. die beiden Seiten der Doppelschicht; 2. die Oberfläche des die Stromcurve umgebenden Fadens, dessen Radius ϱ man schließlich unter alle Grenzen abnehmen läßt; 3. eine Kugel vom Radius ϱ um den Unstetigkeitspunkt ξ, η, ζ der Function $\frac{1}{r}$, auch hier geht man schließlich zur Grenze $\varrho=0$ über; 4. die unendlich ferne Fläche, diese spielt aber wegen der Voraussetzungen über das Verhalten von φ auf ihr keine Rolle.

Das genannte Raumintegral ist nun wegen $\Delta\varphi=0$ gleich

$$-\overline{\iint}\frac{ds}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i},$$

andererseits wegen $\Delta\frac{1}{r}=0$ gleich

$$-\overline{\iint}ds\,\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}.$$

n_i ist die in das Integrationsgebiet hinein weisende Normale. Beide Integrale sind für die gesammte Begrenzung zu bilden. In dem ersteren verschwindet der Antheil der Doppelfläche, weil auf ihren beiden Seiten $\frac{1}{r}$ denselben, $\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}$ entgegengesetzt gleiche Werthe hat; es verschwindet ebenso der Antheil der Fadenoberfläche im Grenzfall $\varrho=0$, weil dann die Ausdehnung des Integrationsgebietes 0 wird, und die zu integrirende Function

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$$

endlich bleibt; es verschwindet endlich auch der Antheil der um den Punkt ξ, η, ζ beschriebenen Kugelfläche, weil dort

$$-\overline{\iint}\frac{ds}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = -\frac{1}{\varrho}\overline{\iint}ds\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{1}{\varrho}\iiint\Delta\varphi\,dx\,dy\,dz$$

(das letztere Integral soll über das Volumen der Kugel ausgeführt werden) wegen $\Delta\varphi = 0$ verschwindet. Daraus folgt, dafs auch

$$\overline{\iint}ds\,\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i} = 0$$

ist. Hier beträgt aber der Antheil der Doppelfläche

$$(\varphi_2 - \varphi_1)\iint ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = 4\pi\,\mathfrak{M}\iint ds\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right),$$

wenn die Normale n von der negativ geladenen Seite 1 zu der positiven Seite 2 weist; der Antheil der Fadenfläche verschwindet freilich im Grenzfall wieder, da auch hier der Integrand endlich bleibt; dagegen liefert die Kugel im Grenzfall $\varrho = 0$ den Beitrag

$$\lim_{\varrho=0}\overline{\iint}ds\,\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r} = -\varphi_{\xi,\eta,\zeta}\lim_{\varrho=0}\frac{1}{\varrho^2}\overline{\iint}ds = -4\pi\varphi_{\xi,\eta,\zeta},$$

so dafs man die Gleichung

$$\varphi_{\xi,\eta,\zeta} = \mathfrak{M}\iint ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} \tag{230}$$

erhält; sie ist identisch mit (68).

Das Flächenintegral in dieser Formel ist über die Ampère'sche Fläche zu bilden, deren Form und Lage, von der Randcurve abgesehen, willkürlich ist. Das Integral darf also nur von der letzteren abhängen. In der That ist

$$ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{ds}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{ds}{r^2}\cos(r, n);$$

$-ds\cos(r, n)$ ist aber die Projection von ds auf eine um den Punkt ξ, η, ζ beschriebene, durch den Ort von ds hindurchgehende

Kugelfläche, $-\frac{ds}{r^2}\cos(r, n)$ defshalb der körperliche Winkel $d\Omega$, unter dem ds vom Punkt ξ, η, ζ aus gesehen wird, und zwar ist $d\Omega$ positiv, wenn ds diesem Punkt die positiv geladene Seite 2 zuweist; denn dann ist $\cos(r, n) < 0$. Führt man die Integration über $d\Omega$ aus, so findet man unter Fortlassung des jetzt überflüssigen Index von φ

$$\varphi = \mathfrak{M}\,\Omega, \tag{230a}$$

wo Ω die gesammte perspectivische Ausdehnung oder den körperlichen Winkel (Kegelecke) der Ampère'schen Fläche für einen Beobachter im Punkt ξ, η, ζ bedeutet. Flächenelemente ds, welche wie in Figur 21 die Elemente ds_1 und ds_2 unter gleichen, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmenden Winkeln $d\Omega$ erscheinen, heben sich bei dieser Integration gegenseitig auf. Daher hängt Ω thatsächlich nur von der Form und Lage der Stromcurve ab. Ist Ω' der Werth, dem Ω zustrebt, wenn man sich einem Punkt der Ampère'schen Fläche von der positiven Seite beliebig nähert, so ist (siehe Figur 22)

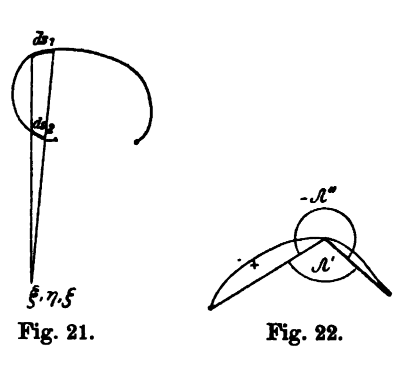


Fig. 21. Fig. 22.

$$\Omega'' = -(4\pi - \Omega')$$

der Grenzwerth für eine Annäherung von der negativen Seite her. Der Potentialsprung beträgt demnach

$$\mathfrak{M}(\Omega' - \Omega'') = 4\pi\mathfrak{M},$$

was uns zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung zurückführt.

Noch eine andere Deutung läfst Gleichung (230) zu. $\frac{1}{r}$ ist die Potentialfunction eines magnetischen Einheitspoles im Punkt ξ, η, ζ, $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ also die von der negativen zur positiven Seite der Ampère'schen Fläche weisende Componente seiner Feldstärke und

$$+\iint ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

die Anzahl der Kraftlinien, welche er von der positiven zur negativen Seite durch die AMPÈRE'sche Fläche entsendet; als positiv zählt also eine Kraftlinie, wenn sie in der entgegengesetzten Richtung wie die vom Strom herrührenden Kraftlinien die Fläche durchdringt; Kraftlinien, welche sie zweimal in entgegengesetztem Sinne schneiden, zählen nicht mit. Gleichung (230) sagt also aus, dafs φ der Anzahl der Kraftlinien proportional ist, die ein Einheitspol im Punkt ξ, η, ζ durch die Stromcurve hindurch schickt. Da das Potential einer Reihe von Magnetpolen $\mathfrak{m}$ in Bezug auf das magnetische Feld des Stromes

$$P = \sum \mathfrak{m}\,\varphi = \mathfrak{M}\int\!\!\int ds \sum \mathfrak{m} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \tag{230b}$$

ist, so ist sie ebenfalls proportional zu der Anzahl der Kraftlinien, welche das magnetische System durch die Stromcurve sendet. Arbeit wird nur bei einer Verrückung geleistet, welche die Zahl dieser Kraftlinien verändert; ihr Betrag wird durch $-\delta P$ gemessen.

Schon in § 52 haben wir gezeigt, dafs die Energie der Wechselwirkung eines elektrisch polarisirten Körpers mit einem elektrischen Felde

$$\int\!\!\int\!\!\int \left(l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

beträgt. Auf das Gebiet der permanenten Magnete übertragen, lautet dieser Ausdruck:

$$\int\!\!\int\!\!\int \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz;$$

er geht durch eine schon in § 54 benutzte partielle Integration unter Berücksichtigung von (193) über in:

$$\begin{aligned} P &= -\int\!\!\int\!\!\int \varphi \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz - \int\!\!\int ds\, \varphi\, \overline{\sigma_{n_i}} \\ &= \int\!\!\int\!\!\int \varphi\, \mu'\, dx\, dy\, dz + \int\!\!\int ds\, \varphi\, m'. \end{aligned}$$

Versteht man unter φ die Potentialfunction eines linearen Stromes, unter μ' und m' die scheinbare Ladung eines Magneten, so giebt der letztere Ausdruck die potentielle Energie ihrer Wechselwirkung.

Wie wir nun soeben sahen, ist φ mehrwerthig, wenn wir volle Umläufe um die Stromcurve mit in Betracht ziehen; führen wir den

Magneten einmal um den Strom herum in seine alte Lage, so durchschneidet jeder Theil von ihm einmal die AMPÈRE'sche Fläche, so dafs in der letzten Gleichung überall die Constante $\pm 4\pi\mathfrak{M}$ zu φ hinzugefügt werden mufs. Dadurch wird aber P nicht geändert, da nach § 49 die gesammte freie Ladung des Magneten

$$\iiint \mu' \, dx \, dy \, dz + \iint ds \, m' = 0$$

ist. P ist also trotzdem einwerthig, d. h. eine dauernde Kreisbewegung des Magneten um den Strom kann nicht von selbst eintreten.

Anders aber, wenn sich ein Theil des Stromleiters mit den Magneten bewegt. In Figur 23 sollen K_1 und K_2 zwei metallische, kreisförmige und gleichgrofse Gleitschienen sein, denen der Strom durch die Drähte D_1 und D_2 zugeführt wird. Um ihre gemeinsame Axe A kann der Magnet M rotiren, dessen positives Ende zwischen den Gleitschienen liegt, während sein negatives Ende sich noch über der oberen von ihnen befindet. Die Drähte d_1 und d_2 sind mit ihm fest verbunden; sie gleiten auf K_1 und K_2 und schliefsen den Strom durch die ebenfalls leitende Axe.

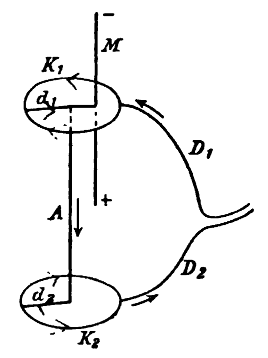


Fig. 23.

Die AMPÈRE'sche Fläche ist hier deformirbar; rechnet man zu ihr das Rechteck, von dem d_1, A und d_2 drei Seiten sind, so besteht ihre Deformation darin, dafs sie sich bei einer Drehung der beweglichen Theile des Apparates um Stücke der durch K_1 und K_2 gehenden Cylinderfläche vergröfsert oder verkleinert. Bei einer vollen Umdrehung kommt die ganze Cylinderfläche einmal hinzu. Für einen am positiven Ende des Magneten befindlichen Beobachter nimmt ihre perspectivische Ausdehnung Ω dabei zu, und zwar fast um $\pm 4\pi$, wenn der Cylinder recht lang und schmal ist, so dafs seine Grundflächen in ihrer perspectivischen Ausdehnung verschwindend klein sind; befindet sich der Beschauer aber am negativen Ende, so ändert sich Ω für ihn fast gar nicht. Für den einen Theil des Magneten ist demnach

$$\varphi = \mathfrak{M}\,\Omega$$

mehrwerthig, für den anderen nicht. Dann ist auch P mehrwerthig und kann bei dauernder Rotation in infinitum abnehmen; die

ponderomotorischen Kräfte, welche stets eine Abnahme von P herbeizuführen streben, führen mithin den Magneten dauernd im Kreis herum.

Um schliefslich ein Beispiel für die Verwendung von (230a) zu geben, fragen wir nach der magnetischen Kraft, welche ein Kreisstrom vom Radius R in einem Punkt seiner Axe hervorruft. Sie kann aus Symmetrie nur in der Richtung der Axe liegen; daher brauchen wir φ auch nur für Punkte der Axe zu bestimmen. Ist ξ der Abstand eines solchen vom Kreismittelpunkt, so ist

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{R}{\xi}$$

der Winkel, welchen der von ihm nach einem Punkt der Stromcurve gezogene Radiusvector mit der Axe bildet, so dafs

$$\Omega = 2\pi \int_0^\alpha \sin\alpha \, d\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}\right),$$

$$\varphi = \mathfrak{M}\,\Omega = 2\pi\,\mathfrak{M}\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{R^2 + \xi^2}}\right),$$

und die magnetische Feldstärke

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{2\pi\,\mathfrak{M}\,R^2}{\sqrt{R^2 + \xi^2}^3}$$

wird. Bei der Tangentenbussole benutzt man diese Gleichung zur Bestimmung von $\mathfrak{M}$, indem man die Ebene des Kreisstromes in den magnetischen Meridian stellt und mit Hülfe einer kleinen Magnetnadel die Richtung der Resultante aus der bekannten Horizontalintensität des erdmagnetischen Feldes und der magnetischen Kraft des Stroms beobachtet. Der Winkel zwischen ihr und dem Meridian giebt in seiner Tangente das Verhältnifs der beiden Kräfte an.

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Stromstärke definirt als die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Stromleiters hindurchgehende Elektricitätsmenge. Daraus ergiebt sich eine Möglichkeit, die Stromstärke elektrostatisch zu messen, da wir Elektricitätsmengen in absolutem Maafs bestimmen können. Eine andere Methode, Stromstärken wenigstens relativ zu messen, beruht auf dem FARADAY'schen Gesetz, dafs die Quantität der an der Grenze elektrolytischer Leiter ausgeschiedenen Stoffe der hindurchgesandten Elektricitätsmenge, also der Stromstärke und der Zeit proportional ist, während welcher der Strom wirkte. Unabhängig davon können wir

jetzt den Strom durch seine magnetischen Wirkungen bestimmen. Das sogenannte elektromagnetische Maafssystem setzt seine Intensität gleich dem Moment $\mathfrak{M}$ der äquivalenten Doppelfläche. Erfahrungsgemäfs ist der so bestimmte Werth I_{em} proportional zu dem elektrostatisch gemessenen, I_{es}. Die Dimension des Proportionalitätsfactors findet man aus der Ueberlegung, dafs $\mathfrak{M}$ das Product einer Flächendichte und einer Länge, also auch

$$I_{em} = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

ist; dagegen ist (siehe § 61)

$$I_{es} = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}]$$

daraus folgt

$$\frac{I_{es}}{I_{em}} = [L\, T^{-1}],$$

der Proportionalitätsfactor A ist der Dimension nach eine Geschwindigkeit. Die Versuche von W. Weber und R. Kohlrausch ergaben A als gleich der rund $3 \cdot 10^{10}$ cm. sec.$^{-1}$ betragenden Lichtgeschwindigkeit im Vacuum und zwar stimmten die beiden Werthe mit einer Genauigkeit überein, die zu der Annahme zwang, dafs dies nicht auf einen Zufall, sondern auf einen tiefgehenden Zusammenhang zwischen elektromagnetischen und optischen Erscheinungen zurückzuführen wäre. Der Maxwell'schen Theorie zufolge sind geradezu die optischen Erscheinungen rein elektromagnetischer Natur, wie wir weiter unten sehen werden.

Natürlich hat diese Veränderung der Stromeinheit die Veränderung der anderen elektrischen Einheiten zur Folge. Nicht nur die Stromdichte und die Elektricitätsmenge, deren Beträge sich wie die der Stromstärke von dem einen in das andere Maafssystem umrechnen, sondern auch die elektrische Feldstärke, der Widerstand und die Leitfähigkeit werden hierdurch betroffen, wenn anders man nicht die Werthe der in den Gleichungen (229) bis (229f) auftretenden Energiequanten ändern will. Dies wäre aber unpraktisch, da die Energie sich unabhängig von allen elektrischen Methoden in absolutem Maafs bestimmen läfst. Nach (229b), (229d) und (229f) ist defshalb

$$\frac{\mathfrak{E}_{es}}{\mathfrak{E}_{em}} = \frac{I_{em}}{I_{es}} = \frac{1}{A} \qquad \mathfrak{E}_{em} = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$$

$$\frac{\tau_{es}}{\tau_{em}} = \frac{I^2_{es}}{I^2_{em}} = A^2 \qquad \tau_{em} = [L^{-2}\, T]$$

$$\frac{w_{es}}{w_{em}} = \frac{I^2_{em}}{I^2_{es}} = \frac{1}{A^2} \qquad w_{em} = [L\, T^{-1}].$$

Das COULOMB'sche Gesetz lautet im elektromagnetischen Maafssystem

$$K = A^2 \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Wir wollen im Folgenden der Einheitlichkeit wegen das elektrostatische Maafssystem beibehalten, obwohl die Einführung des elektromagnetischen die Formeln dieses Abschnitts vereinfachen würde. Die Gleichungen (230), (230a) und (230b) lauten dann bei Einführung der Stromstärke I

$$\varphi = \frac{1}{A} I \iint ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{A} I \Omega \tag{230c}$$

$$P = \frac{I}{A} \iint ds \sum \mathfrak{m} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}. \tag{230d}$$

§ 63. Das magnetische Feld eines linearen Stroms, dargestellt durch Integrale über die Stromcurve. Die Rückwirkung einer magnetischen Feldstärke auf den Stromleiter.

Aus der Formel (230b) wollen wir jetzt allgemein die magnetische Kraft berechnen. Dazu müfsten wir eigentlich dem Punkt ξ, η, ζ eine Verschiebung $-dq$ ertheilen. Da es aber nur auf seine relative Lage zum Stromleiter ankommt, können wir statt dessen dem letzteren die Verschiebung $+dq$ geben, deren Projectionen auf die Coordinatenaxen da, db, dc heifsen sollen; $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ ist dann die in Richtung von dq weisende Kraftcomponente am Ort ξ, η, ζ.

Zunächst aber müssen wir, um Vorzeichenzweideutigkeiten zu vermeiden, eine Bestimmung über die Lage der drei Coordinatenaxen zu einander machen; diese ist nämlich durch die Forderung der Rechtwinkligkeit nicht eindeutig bestimmt, man bekommt aus einem System ein anderes, welches sich durch keinerlei Drehungen mit dem ersteren zur Deckung bringen läfst, wenn man den Richtungssinn der einen Axe umkehrt. Wir setzen nun fest, dafs im Folgenden stets die z-Axe für einen in der positiven y-Richtung blickenden Beobachter nach oben weisen soll, wenn die x-Axe vor ihm von links nach rechts vorüberführt (siehe Figur 24).

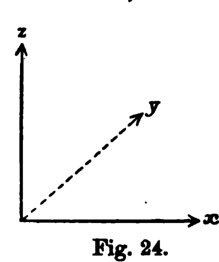


Fig. 24.

Ferner rechnen wir das Linienelement dl der Stromcurve, dessen Projectionen auf die Axen dx, dy, dz heifsen sollen, positiv in der Stromrichtung und fassen seinen Abstand r vom Punkt ξ, η, ζ als einen von dem letzteren fort weisenden Vector auf, wie wir es auch bisher thaten.

Bei der Verschiebung um dq beschreibt das Linienelement dl eine Fläche von der Gröfse

$$dl\,dq\sin(dl, dq),$$

deren Projectionen auf die Coordinatenebenen gleich

$$\pm\begin{vmatrix} dy & dz \\ db & dc \end{vmatrix}, \quad \pm\begin{vmatrix} dz & dx \\ dc & da \end{vmatrix}, \quad \pm\begin{vmatrix} dx & dy \\ da & db \end{vmatrix}$$

sind. Seine Projection auf die um den Punkt ξ, η, ζ beschriebene, durch den Ort von dl hindurchgehende Kugel ist also

$$\pm\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r,x) & \cos(r,y) & (\cos r,z) \end{vmatrix},$$

und die entsprechende Veränderung von Ω, der perspectivischen Ausdehnung der AMPÈRE'schen Fläche,

$$d\,\Omega = \pm\frac{1}{r^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r,x) & \cos(r,y) & \cos(r,z) \end{vmatrix}.$$

Das Vorzeichen, welches zu wählen ist, ist entweder stets das positive oder stets das negative. Diese Frage läfst sich daher an einem Beispiel beantworten.

Die Stromcurve liege in der xz-Ebene, dl weise in die positive x-Richtung, dq in die positive z-Richtung, während $\eta < 0$ sein soll; dann ist

$$\begin{matrix} dx > 0 & dy = 0 & dz = 0 \\ da = 0 & db = 0 & dc > 0 \end{matrix}$$

und

$$\cos(r,y) > 0;$$

demnach

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r,x) & \cos(r,y) & \cos(r,z) \end{vmatrix} = -dx\,dc\cos(r,y) < 0.$$

Liegt ferner, wie in der Figur 25, dl im tiefsten Punkt der Stromcurve, so kehrt die AMPÈRE'sche Fläche dem Beschauer in ξ, η, ζ die positive Seite zu; denn innerhalb der Stromcurve durchstoſsen nach der AMPÈRE'schen Schwimmerregel die Kraftlinien in der auf ihn zuführenden Richtung die xz-Ebene. Daher ist $\Omega > 0$, und da es durch die Verrückung von dl um dq dem absoluten Werth nach abnimmt, $d\Omega < 0$. Läge dl im höchsten Punkt, so wäre $\Omega < 0$, nähme aber, absolut genommen, zu. Also gilt in der letzten Gleichung für $d\Omega$ das Vorzeichen $+$ und wir finden durch Integration nach dl über die ganze Stromcurve:

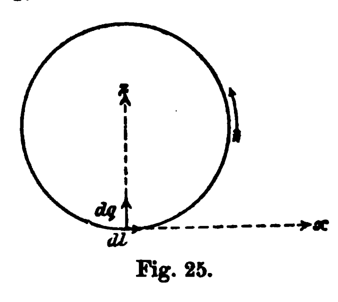


Fig. 25.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q}\, dq = \frac{I}{A} \overline{\int} \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ da & db & dc \\ \cos(r,x) & \cos(r,y) & \cos(r,z) \end{vmatrix} dl.$$

Die Kraftcomponenten nach den Coordinatenrichtungen ergeben sich hieraus, wenn man dq der Reihe nach mit da, db, dc identificirt; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, dz \right) = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{y-\eta}{r^3}\, dz - \frac{z-\zeta}{r^3}\, dy \right) \\ M &= \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dz + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dx \right) = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{z-\zeta}{r^3}\, dx - \frac{x-\xi}{r^3}\, dz \right) \\ N &= \frac{\partial \varphi}{\partial c} = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{dy}\, dx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{dx}\, dy \right) = \frac{I}{A} \overline{\int} \left(\frac{x-\xi}{r^3}\, dy - \frac{y-\eta}{r^3}\, dx \right); \end{aligned}\right\} \quad (231)$$

denn es ist

$$\frac{1}{r^2} \cos(r,x) = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = + \frac{x-\xi}{r^3} \quad \text{etc.}$$

Die Form dieser Gleichungen legt es nahe, dem Stromelement dl an den berechneten Kraftcomponenten die Antheile

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{I}{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}dz\right) = \frac{I}{Ar^3}[(y-\eta)\,dz - (z-\zeta)\,dy] \\ M &= \frac{I}{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}dx\right) = \frac{I}{Ar^3}[(z-\zeta)\,dx - (x-\xi)\,dz] \\ N &= \frac{I}{A}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}dx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}dy\right) = \frac{I}{Ar^3}[(x-\xi)\,dy - (y-\eta)\,dx] \end{aligned}\right\} \quad (231\,\text{a})$$

zuzuschreiben. Doch ist dieser Schlufs keineswegs zwingend; vielmehr verträgt sich mit (231) jeder Zusatz zu (231 a), der bei der Integration über eine geschlossene Curve verschwindet. Stellt man sich aber auf den Standpunkt der letzteren Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} L(x-\xi) + M(y-\eta) + N(z-\zeta) &= 0 \\ L\,dx \quad + M\,dy \quad + N\,dz \quad &= 0; \end{aligned}$$

die magnetische Kraft steht also sowohl auf der Entfernung r als auf der Richtung des Linienelements dl senkrecht. Ihre Gröfse berechnet man am einfachsten, wenn man bedenkt, dafs

$$(y-\eta)\,dz - (z-\zeta)\,dy = \begin{vmatrix} y-\eta & z-\zeta \\ dy & dz \end{vmatrix}$$

etc. die Projectionen des Parallelogramms aus r und dl auf die Coordinatenebenen sind, und dafs dessen Flächeninhalt gleich $r\,dl \sin(r, dl)$ ist; demnach ist

$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = \frac{I}{Ar^2}\,dl \sin(r, dl). \qquad (231\,\text{b})$$

Diese Gleichung spricht das Biot-Savart'sche Gesetz aus. Hier liegt der schon in der Einleitung angekündigte Fall einer Kraft vor, welche weder anziehend noch abstofsend, sondern im Kreise um dl herumführend wirkt.

Erfahrungsgemäfs gilt für die Wechselwirkung zwischen stationären Strömen und Magneten das Princip von der Gleichheit von actio und reactio. Nach (231 a) ist

$$\frac{I}{A}\,\mathfrak{m}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}dz\right)$$

die x-Componente der vom Stromelement dl auf einen im Punkt ξ, η, ζ liegenden Magnetpol $\mathfrak{m}$ ausgeübten Kraft,

$$\mathfrak{X} = -\frac{I}{A}\,\mathfrak{m}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,dy - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\,dz\right),$$

mufs also die entsprechende Componente der von dem Magnetpol auf dl ausgeübten Wirkung sein. Nun sind aber

$$-\,\mathfrak{m}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = L, \quad -\,\mathfrak{m}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} = M, \quad -\,\mathfrak{m}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = N$$

die Componenten der von dem Pol $\mathfrak{m}$ ausgehenden Feldstärke, also sind

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{I}{A}(N\,dy - M\,dz)\\
\mathfrak{Y} &= \frac{I}{A}(L\,dz - N\,dx)\\
\mathfrak{Z} &= \frac{I}{A}(M\,dx - L\,dy)
\end{aligned}\right\} \qquad (232)$$

die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche dl in einem magnetischen Felde erfährt, dessen Feldstärke die Componenten L, M, N hat.

Die gilt zunächst nur für den Fall einer magnetischen Punktladung. Liegen deren mehrere oder stetig vertheilte Ladungen vor, so treten in dem aus dem Princip der Gleichheit von actio und reactio hervorgehenden Schwerpunktssatz die vom Strom auf die Theile der Ladung ausgeübten Kräfte additiv auf. Folglich müssen sich auch die Rückwirkungen auf den Stromleiter addiren; und da sich die Feldstärken ebenfalls addiren, bleiben die Gleichungen (232) in Gültigkeit. Es folgt aus ihnen

$$\mathfrak{X}\,dx + \mathfrak{Y}\,dy + \mathfrak{Z}\,dz = 0,$$

$$\mathfrak{X}L + \mathfrak{Y}M + \mathfrak{Z}N = 0,$$

die ponderomotorische Kraft steht also sowohl auf dem Stromelement dl als der Richtung der magnetischen Feldstärke senkrecht, und zwar liegen Stromrichtung, Feldstärke und ponderomotorische Kraft qualitativ — der Winkel ϑ zwischen Stromrichtung und Feld-

stärke beträgt im Allgemeinen nicht $\frac{\pi}{2}$ — zu einander wie die x-, y- und z-Axe, denn wählt man

$$dx > 0, \qquad dy = 0, \qquad dz = 0,$$
$$\mathfrak{L} = 0, \qquad M > 0, \qquad N = 0,$$

so wird nach (232)

$$\mathfrak{X} = 0 \qquad \mathfrak{Y} = 0 \qquad \mathfrak{Z} > 0.$$

(Siehe Figur 26). Der Schwimmer, von dem die AMPÈRE'sche Regel spricht, wird nach links gedrängt, wenn er in Richtung der Kraftlinie blickt. Der Werth der resultirenden ponderomotorischen Kraft ist

$$\mathfrak{K} = \frac{I}{A}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\sin\vartheta\, dl,$$

also proportional zur Stromintensität, zur magnetischen Feldstärke und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Die Gleichungen (232) können zunächst ebenso wie (231a) nur in dem Sinn Gültigkeit beanspruchen, dafs sie bei der Integration über einen geschlossenen Strom Richtiges ergeben. Aber während sich die von dem Element dl ausgehende magnetische Wirkung nicht isoliren läfst, ist die ponderomotorische Wirkung auf dl bei deformirbaren Stromleitern für sich allein der Beobachtung zugänglich; es zeigt sich dann, dafs die Gleichungen (232) sie richtig zu berechnen gestatten.

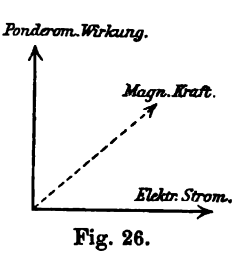


Fig. 26.

§ 64. Die Wechselwirkung zwischen linearen Strömen.

Da ein Strom eine magnetische Kraft hervorruft, andererseits von einer solchen ponderomotorische Wirkungen erleidet, müssen auch zwei lineare Ströme auf einander ponderomotorisch wirken. Die Stromstärken sollen I und J, die Elemente der Stromcurven dl und $d\lambda$, ihre Projectionen auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz und $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sein; unter x, y, z; ξ, η, ζ verstehen wir die Coordinaten ihres Orts. Schliefslich ist wie bisher ihre Entfernung,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

ein Vector, dem wir die Richtung vom Punkt ξ, η, ζ nach dem Punkt x, y, z beilegen.

Vertauscht man in (232) I und dx, dy, dz mit J und $d\xi, d\eta, d\zeta$ und setzt für L, M, N die sich aus (231a) ergebenden Werthe, so findet man für die Componenten der ponderomotorischen Kraft, welche dl auf $d\lambda$ ausübt, das „GRASSMANN'sche Elementargesetz":

$$
\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \frac{IJ}{A^2}\left\{dx\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)\right\} \\
\mathfrak{Y} &= \frac{IJ}{A^2}\left\{dy\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)\right\} \\
\mathfrak{Z} &= \frac{IJ}{A^2}\left\{dz\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (233)
$$

Es giebt, wie aus der Ableitung hervorgeht, eine zu $d\lambda$ senkrechte Kraft an, welche dem Princip der Gleichheit von actio und reactio nicht genügt; denn dl und $d\lambda$ lassen sich nicht ohne Aenderung mit einander vertauschen.

Indessen ist die Gleichung (233) in demselben Sinne hypothetisch, wie die zur Ableitung benutzte Formel (231a). Erst wenn man sie über die Stromcurve von I integrirt, mufs sie Richtiges liefern. Das fragliche Elementargesetz kann man daher noch in weitgehendem Maafse willkürlich gestalten. Nach AMPÈRE üben z. B. die Elemente Anziehungs- und Abstofsungskräfte auf einander aus. Wir wollen das AMPÈRE'sche Gesetz ableiten, indem wir (233) nach dl integriren, das Integral durch partielle Integration umformen und dann wieder von der ganzen Stromcurve auf das Linienelement dl zurückschliefsen.

Wir führen diese Umformung nur an dem Ausdruck für $\mathfrak{X}$ durch. Da

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r^3}$$

und

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = dl\,d\lambda \cos(dl, d\lambda)$$

ist, finden wir für die x-Componente der Integralwirkung zunächst den Betrag:

$$\frac{IJ}{A^2}\left\{ d\xi \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} dl + d\eta \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dx}{dl} dl + d\zeta \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dx}{dl} dl \right.$$
$$\left. + d\lambda \overline{\int} \frac{x-\xi}{r^3} \cos(dl, d\lambda)\, dl \right\}.$$

Der Integrationsweg ist eine geschlossene Curve; daher heben sich bei der partiellen Integration die Terme fort, welche sich auf die Integrationsgrenzen beziehen, und es ist

$$\overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dx}{dl} dl = \overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{d(x-\xi)}{dl} dl = -\overline{\int} (x-\xi) \frac{d}{dl} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dl$$
$$= \overline{\int} (x-\xi) \frac{d}{dl} \left(\frac{y-\eta}{r^3} \right) dl = \overline{\int} \frac{x-\xi}{r^3} \left(\frac{dy}{dl} - 3\, \frac{y-\eta}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \right) dl.$$

Ebenso ist

$$\overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} dl = \overline{\int} \frac{x-\xi}{r^3} \left(\frac{dx}{dl} - 3\, \frac{x-\xi}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \right) dl,$$

$$\overline{\int} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dx}{dl} dl = \overline{\int} \frac{x-\xi}{r^3} \left(\frac{dz}{dl} - 3\, \frac{z-\zeta}{r} \frac{\partial r}{\partial l} \right) dl.$$

Bedenkt man ferner, daſs

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \cos(r, dl)$$

$$\frac{x-\xi}{r} d\xi + \frac{y-\eta}{r} d\eta + \frac{z-\zeta}{r} d\zeta = \cos(r, d\lambda)\, d\lambda$$

ist, so findet man für die in Rede stehende Kraftcomponente den Werth

$$\frac{IJ}{A^2} d\lambda \int \frac{x-\xi}{r^3} \left(2\cos(dl, d\lambda) - 3\cos(r, dl)\cos(r, d\lambda)\right) dl.$$

Zieht man endlich den Schlufs von der Integral- auf die Elementarwirkung, so erhält man für die AMPÈRE'sche Anziehungskraft den Betrag

$$\mathfrak{K} = \frac{IJ}{A^2} \cdot \frac{dl\, d\lambda}{r^2} \left(2\cos(dl, d\lambda) - 3\cos(r, dl)\cos(r, d\lambda)\right); \qquad (234)$$

denn es ist ihre x-Componente

$$\mathfrak{X} = \frac{x-\xi}{r} \mathfrak{K},$$

und für die beiden anderen würden die entsprechenden Umformungen liefern

$$\mathfrak{Y} = \frac{y-\eta}{r} \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{z-\zeta}{r} \mathfrak{K}.$$

Zu einer einfachen Deutung dieser Gleichung gelangt man, wenn man die x-Axe parallel zur Entfernung r legt. Wegen der Identität

$$\cos(dl, d\lambda) = \cos(x, dl)\cos(x, d\lambda) + \cos(y, dl)\cos(y, d\lambda) + \cos(z, dl)\cos(z, d\lambda)$$

nimmt (234) dann die folgende Form an:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} = \frac{IJ}{A^2} \frac{dl\, d\lambda}{r^2} \Big(&-\cos(x, dl)\cos(x, d\lambda) \\ &+ 2\left(\cos(y, dl)\cos(y, d\lambda) + \cos(z, dl)\cos(z, d\lambda)\right)\Big) \\ = \frac{IJ}{A^2} &\frac{-dx\, d\xi + 2(dy\, d\eta + dz\, d\zeta)}{r^2}.\end{aligned}$$

Die Componenten von dl und $d\lambda$ in Richtung der Entfernung r üben demnach die Kraft

$$-\frac{IJ\, dx\, d\xi}{A^2 r^2},$$

die dazu senkrechten dagegen die Kraft

$$+2\frac{IJ(dy\, d\eta + dz\, d\zeta)}{A^2 r^2}$$

auf einander aus. Je nachdem diese Werthe positiv oder negativ sind, bedeuten sie Anziehung oder Abstofsung.

Schliefslich wollen wir noch zeigen, dafs sich die Wirkungen zweier Stromkreise auf einander aus einem Potential

$$P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{\cos(dl, d\lambda)}{r}\,dl\,d\lambda \tag{235}$$

herleiten lassen in der Art, dafs wenn der vom Strom J durchflossene Draht eine Verschiebung erfährt, deren Componenten für das Element $d\lambda$ gleich $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sind, die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

$$\overline{\int} d\lambda \left\{\delta\xi\overline{\int}\mathfrak{X}\,dl + \delta\eta\overline{\int}\mathfrak{Y}\,dl + \delta\zeta\overline{\int}\mathfrak{Z}\,dl\right\} = -\delta P \tag{236}$$

ist. (Hier ist die Bezeichnung insofern verändert, als an die Stelle von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ getreten ist: $\mathfrak{X}\,dl\,d\lambda$, $\mathfrak{Y}\,dl\,d\lambda$, $\mathfrak{Z}\,dl\,d\lambda$). Dabei betrachten wir $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zwar nicht als längs der Stromcurve constant — diese wird also im Allgemeinen deformirt —, wohl aber als stetig veränderlich. Gleitstellen sind hierdurch ausgeschlossen.

Zu diesem Zweck gehen wir vom GRASSMANN'schen Elementargesetz aus. Wir setzen in (233) zunächst

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta$$
$$= -\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}d\zeta\right) = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda}d\lambda$$

und führen dann zur Festlegung eines Punktes auf der Stromcurve J den Parameter $\varkappa$ ein, so dafs

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda}d\lambda = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\varkappa}d\varkappa = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa}d\varkappa$$

wird. Den gleichen Dienst leistet für die Stromcurve I der Parameter k. Dann folgt aus (233) und (235)

$$\mathfrak{X}\,dl\,d\lambda = -\frac{IJ}{A^2}\left\{\frac{dx}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa} + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{dk} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{dk} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{dk}\right)\right\}dk\,d\varkappa, \tag{233a}$$

$$P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right)dk\,d\varkappa.$$

Also wird

$$\delta P = -\frac{IJ}{A^2}\int\!\!\int\left\{\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\delta\zeta\right)\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\delta\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\delta\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\delta\zeta}{d\varkappa}\right)\right\} dk\,d\varkappa;$$

formen wir dann den zweiten Theil dieses Integrals durch partielle Integration nach $\varkappa$ um, so findet man

$$\delta P = \frac{IJ}{A^2}\int\!\!\int\left\{\delta\xi\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right) + \frac{dx}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\delta\varkappa}\right]\right.$$
$$+ \delta\eta\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right) + \frac{dy}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa}\right]$$
$$\left. + \delta\zeta\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{dx}{dk}\frac{d\xi}{d\varkappa} + \frac{dy}{dk}\frac{d\eta}{d\varkappa} + \frac{dz}{dk}\frac{d\zeta}{d\varkappa}\right) + \frac{dz}{dk}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\varkappa}\right]\right\} dk\,d\varkappa;$$

der Vergleich mit (233 a) bestätigt unmittelbar die Richtigkeit von (236).

Nun hatten wir soeben Gleitstellen ausgeschlossen. Es könnte scheinen — und thatsächlich ist dieser Einwand erhoben worden —, als wäre die Allgemeingültigkeit der Gleichung (236) dadurch beeinträchtigt. Man darf sich aber das Gleiten zweier Stücke des leitenden Systems nicht als unvermittelte Bewegung absolut starrer Körper vorstellen; denn hierbei würde jeder Stromfaden, insofern er aus einer continuirlichen Reihe materieller Theile besteht, zerrissen werden. Erfahrungsgemäfs häuft sich die Elektricität an solchen Stellen aber nicht an, sondern gleicht sich durch neugebildete Schliefsungen sofort aus. Wir müssen defshalb die beiden Enden des materiellen Theils des Stromfadens nicht als Enden der Leitung überhaupt, sondern als durch ein äufserst kleines, von materiellen Theilen freies Stromfadenelement verbunden denken. In diesem Sinne läfst sich unsere Rechnung durchaus aufrecht erhalten.

Thatsächlich kommt eine wirkliche Unstetigkeit der Bewegung in der Natur nicht vor. Vielfach mufs man, um zu grofse Reibung zu vermeiden, zwischen die Enden der festen, an einander „gleitenden" Theile der Leitung eine Flüssigkeit bringen. Jede reibende Flüssigkeit haftet mit ihrer Grenzschicht aber fest an der Wandung,

vermittelt also die Stetigkeit der Bewegung. Und wo es keine Flüssigkeit thut, erzeugen fast continuirlich überspringende Funken Metalldampf, welcher ebenso wirkt, und vermeidet man auch diese, indem man die gleitenden Körper fest gegen einander preſst, so entstehen durch gegenseitige Abschleifung Uebergangsschichten.

Historisch sei bemerkt, daſs HELMHOLTZ an Stelle des NEUMANN'schen Potentials (235) früher[1]) ein anderes benutzte, welches entsteht, wenn man zu (235) die Identität

$$0 = \frac{1}{2A^2}(1-k)\overline{\int}\overline{\int}\frac{\partial^2 r}{dl\,d\lambda}\,dl\,d\lambda,$$

wo k eine unbestimmte Constante ist, hinzuaddirt. Da, was hier nicht bewiesen werden soll,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial l\,\partial\lambda} = \frac{1}{r}\left(\cos(r,dl)\cos(r,d\lambda) - \cos(dl,d\lambda)\right)$$

ist, findet man die Formel

$$P = -\frac{1}{2}\,\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{1}{r}\left[(1+k)\cos(dl,d\lambda) + (1-k)\cos(r,dl)\cos(r,d\lambda)\right]dl\,d\lambda.$$

Wir werden von ihr keinen Gebrauch machen.

Wollte man nach (236) das Potential eines linearen Stromes auf sich selbst berechnen, so erhielte man keinen bestimmten Werth, weil $r = 0$ wird, wenn dl und $d\lambda$ mit einander identisch werden. Zu diesem Zwecke muſs man unter allen Umständen die räumliche Vertheilung des Stromes berücksichtigen.

§ 65. Das magnetische Feld räumlich vertheilter Ströme.

Ein räumlich vertheilter Strom läſst sich als aus Stromfäden bestehend betrachten, deren jeder einen linearen Strom repräsentirt, die Anwendung der Gleichungen (231) also unmittelbar zuläſst. Man braucht nur über alle Stromfäden zu integriren, um die magnetische Kraft der räumlichen Strömung zu finden. An die Stelle der Stromstärke I tritt dabei das Product aus der Stromdichte q (Compo-

---

[1]) Zur Zeit dieser Vorlesung betrachtete HELMHOLTZ selbst den nach ihm benannten Ausdruck für das Potential P als veraltet, wie aus seinem Notizbuch hervorgeht. Der Herausgeber.

nenten: u, v, w) und dem senkrechten Querschnitt dQ des Stromfadens, es wird also

$$Idl = q\,d\,Q\,dl$$

$$Idx = Idl\cos(x,dl) = q\cos(x,dl)\,d\,Q\,dl = u\,d\,Q\,dl$$

etc.

Hier ist $d\,Q\,dl$ ein Volumelement des Stromleiters, freilich von besonderer Form, da ja dl in Richtung der Stromröhre liegt. Bei der Integration über das Volumen kommt es aber nicht darauf an, wie wir uns die Elemente gelagert denken; wir können deſshalb $d\,Q\,dl$ durch $dx\,dy\,dz$ ersetzen und finden so aus (231) für die Componenten der magnetischen Feldstärke eines räumlich vertheilten Stromes:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{A}\iiint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}v - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}w\right)dx\,dy\,dz \\ M &= \frac{1}{A}\iiint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}w - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}u\right)dx\,dy\,dz \\ N &= \frac{1}{A}\iiint\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}u - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}v\right)dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \qquad (237)$$

Hier ersetzen wir die Differentiation von $\frac{1}{r}$ nach x, y, z durch die nach ξ, η, ζ. Da diese Coordinaten bei der Integration nach x, y, z constante Parameter sind, können wir dann die Reihenfolge von Integration und Differentiation umkehren und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \\ M &= \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ N &= \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}, \end{aligned}\right\} \qquad (237\,a)$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{A}\iiint\frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz \\ V &= \frac{1}{A}\iiint\frac{v}{r}\,dx\,dy\,dz \\ W &= \frac{1}{A}\iiint\frac{w}{r}\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \qquad (238)$$

ist. Die Gröfsen U, V, W berechnen sich, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{A}$, aus den Componenten u, v, w des Vectors q wie das scalare Potential φ aus der scalaren Raumdichte der elektrischen Ladung. Man kann sie selbst als die Componenten eines Vectors betrachten, den man als das Vectorpotential der Stromdichte bezeichnet. Denkt man sich einem Continuum eine unendlich kleine Verrückung ertheilt, welche in jedem Punkte dem dort herrschenden Vectorpotential gleichgerichtet und an Gröfse proportional ist, so sind die Terme (siehe Band II dieser Vorlesungen, § 9)

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

proportional den Drehungen, welche ein Volumelement um die x-, die y- und die z-Richtung erfährt; sie sind die Componenten eines neuen Vectors, welchen man dieser Analogie halber als den Wirbel oder Curl des Vectors U, V, W bezeichnet. Die magnetische Feldstärke ist nach (237a) gleich dem Wirbel des Vectorpotentials der Stromdichte.

Wir bilden nun die Wirbelcomponenten der Feldstärke selbst; aus (237a) folgt für die x-Componente:

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\right) - \Delta U.$$

Nach (238) ist aber

$$\Delta U = -\frac{4\pi u}{A} \tag{238a}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{1}{A}\iiint\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right) dx\, dy\, dz;$$

hier ist über den ganzen Raum zu integriren, soweit er vom Strom durchflossen ist. Setzen wir nun wiederum

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \text{ etc.,}$$

so können wir partiell integriren, wobei ein Flächenintegral über

alle Unstetigkeitsflächen der Stromdichte auftritt; die Grenze des Stromgebietes gehört auch dazu:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}$$

$$= \frac{1}{A} \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz + \frac{1}{A} \iint \frac{ds}{r} (q_{n_1} + q_{n_2}).$$

Nach (218a) und (218b) ist aber beim stationären Strom:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$q_{n_1} + q_{n_2} = 0.$$

Also ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0 \tag{238 b}$$

und wir finden für den Wirbel der magnetischen Kraft die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} &= \frac{4\pi}{A} u \\ \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{4\pi}{A} v \\ \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} &= \frac{4\pi}{A} w. \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

Der Wirbel der magnetischen Kraft ist gleich dem 4π-fachen der elektromagnetisch gemessenen Stromdichte; aufserhalb des Stromgebietes verschwindet er; dort ist also die Bedingung erfüllt, unter welcher man die magnetische Kraft durch Differentiation aus einer scalaren Potentialfunction ableiten kann; innerhalb des Stromgebietes ist dies nicht möglich. Für die Divergenz der Kraft folgt aus (237a)

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} = 0; \tag{239 a}$$

magnetische Raumladungen treten nicht auf; und da nach (238) (vgl. § 11) die ersten Ableitungen von U, V, W überall stetig sind, gilt dasselbe nach (237a) von den Componenten der magnetischen Kraft, so dafs auch Flächenbelegungen ausgeschlossen sind. Die Kraftlinien laufen daher alle in sich zurück.

Auf demselben Wege, wie von (231) und (237), gelangt man von (232) zu den Gleichungen für die ponderomotorische Kraft,

welche das Volumelement $dx\,dy\,dz$ des stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld von der Feldstärke L, M, N erfährt:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= \frac{1}{A}(Nv - Mw)\,dx\,dy\,dz \\ \mathfrak{Y} &= \frac{1}{A}(Lw - Nu)\,dx\,dy\,dz \\ \mathfrak{Z} &= \frac{1}{A}(Mu - Lv)\,dx\,dy\,dz).\end{aligned}\right\} \qquad (240)$$

Und ebenso läſst sich die Gleichung (235) für das NEUMANN'sche Potential zweier Ströme auf einander übertragen. Giebt man den Componenten der Stromdichte und den Coordinaten in dem einen von beiden zur Unterscheidung den Index 1, so findet man, da $dl\,d\lambda \cos(dl, d\lambda) = dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta$ ist, und $IJ(dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta)$ durch $(u u_1 + v v_1 + w w_1)\,dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1$ ersetzt werden muſs:

$$P = -\frac{1}{A^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{r}(u u_1 + v v_1 + w w_1)\,dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1; \qquad (241)$$

oder wenn man nach (238) das Vectorpotential U_1, V_1, W_1 der Strömung u_1, v_1, w_1 einführt

$$P = -\frac{1}{A}\int\!\!\int\!\!\int (U_1 u + V_1 v + W_1 w)\,dx\,dy\,dz. \qquad (241\text{a})$$

Will man das Potential eines Stromes auf sich selbst berechnen, so erhält man jetzt, da nach (238) U_1, V_1, W_1 überall endliche Functionen sind, einen bestimmten Werth; man muſs nur in (241) die Integrationen nach $dx\,dy\,dz$ und $dx_1\,dy_1\,dz_1$ über dasselbe Stromgebiet ausführen. Dabei zählt man freilich zunächst jedes Paar von Volumelementen doppelt, indem einmal das Element 1 unter der Bezeichnung $dx\,dy\,dz$ und das Element 2 unter der Benennung $dx_1\,dy_1\,dz_1$ auftritt, das andere Mal umgekehrt. Um dies auszugleichen, setzt man den Factor $\frac{1}{2}$ dazu und findet so für das Selbstpotential eines Stromsystems:

$$\left.\begin{aligned}P &= -\frac{1}{2A^2}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{r}(u u_1 + v v_1 + w w_1)\,dx\,dy\,dz\,dx_1\,dy_1\,dz_1 \\ &= -\frac{1}{2A}\int\!\!\int\!\!\int (Uu + Vv + Ww)\,dx\,dy\,dz;\end{aligned}\right\} \qquad (241\text{b})$$

denn den Index 1 kann man in der letzten Gleichung, wo U, V, W die Componenten des Vectorpotentials der Strömung u, v, w selbst sind, fortlassen. Diese Formel umfaſst natürlich auch den Fall, daſs das Stromsystem aus mehreren unabhängigen Strömen besteht. Sie erinnert in ihrem Aufbau an die Gleichung (210 a) für die Energie eines elektrischen Feldes; denn dort wird über das Product aus der Dichte der Ladung und dem aus ihr abgeleiteten Potential integrirt, hier über die Summe der Producte aus den Componenten der Stromdichte und denen ihres Vectorpotentials. Freilich hat (241 b) das negative Vorzeichen (vgl. § 68).

§ 66. Der Stokes'sche Satz.

Treten auſser den elektrischen Strömen noch permanente Magnete als Ursachen des magnetischen Feldes auf, so superponirt sich zu dem Feld der Ströme das durch die Potentialfunction φ darstellbare Feld der Magnete; an die Stelle der Gleichungen (237 a) tritt dann

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ M &= \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ N &= \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Bildet man die Wirbelcomponenten $\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \xi}$ etc., so heben sich die Differentialquotienten von φ fort, so daſs (239) in Gültigkeit bleibt, bildet man die Divergenz, so verschwinden dagegen die Differentialquotienten des Vectorpotentials und man findet statt der Gleichung (239 a)

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} = - \Delta \varphi. \tag{242 a}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daſs der Vector L, M, N, von dessen physikalischer Bedeutung wir zunächst vollkommen absehen können, überall endlich und stetig ist und im Unendlichen mindesten wie $\frac{1}{R^2}$ abnimmt und zeigen, daſs er dann durch Angabe seiner Divergenz und seines Wirbels eindeutig bestimmt ist. Stimmen nämlich zwei derartige Vectoren L, M, N und L', M', N' in den Wirbeln überein,

so sind die Wirbelcomponenten des Vectors, der durch vectorielle Subtraction der beiden entsteht und die Componenten $L - L'$, $M - M'$, $N - N'$ besitzt,

$$\frac{\partial (N - N')}{\partial \eta} - \frac{\partial (M - M')}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{etc.}$$

Dieser Vector ist also sicher aus einer scalaren Potentialfunction φ ableitbar. Stimmen nun aber die erstgenannten Vectoren auch noch in der Divergenz überein, d. h. ist

$$\frac{\partial (L - L')}{\partial \xi} + \frac{\partial (M - M')}{\partial \eta} + \frac{\partial (N - N')}{\partial \zeta} = 0,$$

so verschwindet auch die Δ-Ableitung der Potentialfunction φ. Weiter wissen wir noch von der Function φ, dafs ihre Ableitungen überall endlich und stetig sind, und dafs dasselbe von ihr selbst gilt. Denn wäre sie irgendwo im Endlichen unendlich grofs, so müfste dasselbe bei den Ableitungen der Fall sein, wäre sie aber unstetig, so würde dies auf das Auftreten von Doppelschichten hinweisen, deren Moment entweder von Ort zu Ort veränderlich — dann wären die Ableitungen nach § 19 unstetig — oder constant sein müfste, — dann würden die letzteren längs der Randcurve nach § 62 unendlich. Ferner müssen nach unseren Annahmen die Ableitungen im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{R^2}$ verschwinden und φ mufs sich in Folge dessen dort mindestens wie $\frac{1}{R}$ einer Constanten nähern, die wir, da es darauf nicht weiter ankommt, gleich Null setzen. Daraus folgt aber nach (83), dafs das für den ganzen Raum zu bildende Integral

$$\iiint \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) dx\, dy\, dz = 0$$

sein mufs, was nur für $\varphi = 0$, also auch $L - L' = 0$, $M - M' = 0$, $N - N' = 0$ möglich ist; was zu beweisen war.

Im Allgemeinen, wenn man Unstetigkeitsflächen der Functionen L, M, N zuläfst, mufs man noch die Flächendivergenz und einen als „Flächenwirbel“ bezeichneten Vector zur Bestimmung hinzuziehen; doch ist damit eigentlich nichts Neues gewonnen, da man zu solchen Unstetigkeiten immer durch Grenzprocesse gelangen kann.

Die Gleichungen (242) sind also die allgemeinste Darstellung eines überall endlichen und stetigen Vectors, welche physikalische

Bedeutung er auch haben mag. φ ist in ihnen nach (242 a) allein durch seine Divergenz, U, V, W nach (238) allein durch seinen Wirbel bestimmt. Das Vectorpotential U, V, W ist freilich nicht wie φ durch (242) eindeutig definirt; vielmehr kann man, da nur seine Wirbelcomponenten dort auftreten, seine Divergenz noch als beliebige Ortsfunction wählen. Setzt man sie überall gleich Null, so folgt aus (242) ähnlich wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} = - \Delta U. \quad \text{etc.}$$

Nur unter dieser Voraussetzung bestimmt es sich aus dem Wirbel von L, M, N in der durch (238) gegebenen Weise.

Als Circulationswerth des Vectors L, M, N für eine geschlossene Curve bezeichnen wir das Linienintegral

$$\overline{\int}(L\,d\xi + M\,d\eta + N\,d\zeta)$$

erstreckt über diese. Er ist Null, wenn der Vector aus einer Potentialfunction ableitbar ist, mufs also durch den Wirbel des Vectors bestimmt sein.

Um diesen Gedanken weiter zu verfolgen, betrachten wir (siehe Figur 27) als Integrationsweg zunächst eine beliebige, nicht geschlossene Curve α, deren Anfangs- und Endpunkt A und B heifsen mögen; einen Punkt ξ, η, ζ auf ihr bestimmen wir durch den Parameter k. L, M, N sollen stetige und differenzirbare Functionen des Ortes sein. Dann variiren wir die Curve so, dafs wir bei constantem k die Coordinaten ξ, η, ζ um $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ wachsen lassen; nur an den Endpunkten A und B sollen diese Verrückungen verschwinden. Integriren wir dann längs der variirten Curve β von A und B und längs der ursprünglichen zurück von B nach A, so ist der Circulationswerth für diesen Umlauf gleich der Differenz $\delta\Phi$ der Werthe, welche das Integral

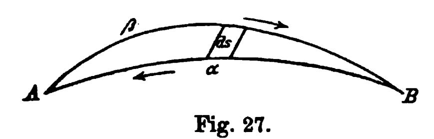


Fig. 27.

$$\Phi = \int_A^B (L\,d\xi + M\,d\eta + N\,d\zeta) = \int_A^B \left(L\frac{d\xi}{dk} + M\frac{d\eta}{dk} + N\frac{d\zeta}{dk}\right) dk$$

für die beiden Curven annimmt.

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int_A^B \Big\{ & \left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dk} + \frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{d\eta}{dk} + \frac{\partial N}{\partial \xi}\frac{d\zeta}{dk}\right)\delta\xi \\ & + \left(\frac{\partial L}{\partial \eta}\frac{d\xi}{dk} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dk} + \frac{\partial N}{\partial \eta}\frac{d\zeta}{dk}\right)\delta\eta \\ & + \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta}\frac{d\xi}{dk} + \frac{\partial M}{\partial \zeta}\frac{d\eta}{dk} + \frac{\partial N}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dk}\right)\delta\zeta \\ & + \left(L\frac{d\delta\xi}{dk} + M\frac{d\delta\eta}{dk} + N\frac{d\delta\zeta}{dk}\right)\Big\}\, dk,\end{aligned}$$

oder wenn man den letzten Theil durch partielle Integration umformt und ein wenig umstellt:

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int_A^B \Big\{ & \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta}\right)\left(\frac{d\zeta}{dk}\delta\eta - \frac{d\eta}{dk}\delta\zeta\right) \\ & + \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi}\right)\left(\frac{d\xi}{dk}\delta\zeta - \frac{d\zeta}{dk}\delta\xi\right) \\ & + \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}\right)\left(\frac{d\eta}{dk}\delta\xi - \frac{d\xi}{dk}\delta\eta\right)\Big\}\, dk.\end{aligned}$$

Bezeichnet man aber mit ds das Flächenstück, welches das dem Differential dk entsprechende Curvenstück bei der Verrückung beschreibt, so ist

$$dk\left(\frac{d\zeta}{dk}\delta\eta - \frac{d\eta}{dk}\delta\zeta\right) = ds\cos(n, x)$$

$$dk\left(\frac{d\xi}{dk}\delta\zeta - \frac{d\zeta}{dk}\delta\xi\right) = ds\cos(n, y)$$

$$dk\left(\frac{d\eta}{dk}\delta\xi - \frac{d\xi}{dk}\delta\eta\right) = ds\cos(n, z);$$

also

$$\left.\begin{aligned}\delta\Phi = \int ds \Big\{ & \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi}\right)\cos(n, y) \\ & + \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}\right)\cos(n, z)\Big\}.\end{aligned}\right\} \quad (243)$$

Die Integration bezieht sich auf den unendlich schmalen Streifen zwischen beiden Curven, daher steht nur ein Integralzeichen da;

und die Richtung der Normalen n ist so gewählt, dafs $\cos(n, z) = -1$ wird, wenn

$$\frac{d\xi}{dk} dk > 0 \qquad \frac{d\eta}{dk} dk = 0 \qquad \frac{d\zeta}{dk} dk = 0$$

$$\delta\xi = 0 \qquad \delta\eta > 0 \qquad \delta\zeta = 0$$

ist. Die Normale und die Umlaufsrichtung, in der wir den Integrationsweg durchlaufen, liegen also zu einander wie die positive z-Axe und eine Drehung um sie, welche von der positiven x- zur positiven y-Axe führt, oder so, wie die Stromrichtung zu den sie umkreisenden magnetischen Kraftlinien.

Um nun den Circulationswerth für einen beliebigen Integrationsweg zu berechnen, bestimmen wir auf ihm zwei willkürlich gewählte Punkte A und B (siehe Figur 28). Durch diese wird er in zwei Theile α und β getheilt. Nun ziehen wir auf einer von ihm berandeten, sonst aber willkürlich gewählten Fläche eine beliebige Curve γ von A nach B und bilden die Circulationswerthe erstens für den von A über β nach B und über γ nach A zurückführenden Weg, zweitens für den Umlauf von A über γ nach B und über α zurück; der zu berechnende Circulationswerth ist die Summe dieser beiden, denn die zweimalige Integration über γ erfolgt in entgegengesetztem Sinn, fällt bei der Addition also heraus. Fährt man so fort, so sieht man, dafs man zum Ziel kommt, wenn man die Fläche in unendlich viele, unendlich schmale, von A nach B führende Streifen theilt, die Circulationswerthe $\delta\Phi$ für ihre Berandung ermittelt und dann über alle Streifen integrirt. Nach (243) findet man so den STOKES'schen Satz

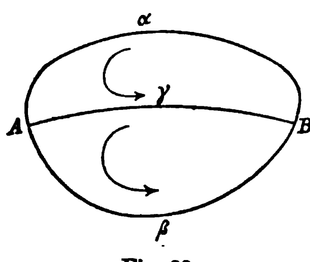


Fig. 28.

$$\left.\begin{aligned}\overline{\int}(L d\xi + M d\eta + N d\zeta) = \int \delta\Phi = \iint ds \Big\{\Big(\frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta}\Big)\cos(n, x) \\ + \Big(\frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi}\Big)\cos(n, y) + \Big(\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}\Big)\cos(n, z)\Big\};\end{aligned}\right\} \quad (243\,\text{a})$$

das geschlossene Linienintegral des Vectors L, M, N ist hier in ein Flächenintegral über die Normalcomponente seines Wirbels verwandelt. Die der Integration zu Grunde zu legende Fläche ist dabei bis auf ihre Berandung beliebig gewählt. Führt man sie für zwei

verschiedene, aber von derselben Curve berandete Flächen durch, so ist die Differenz der gefundenen Werthe gleich dem Integral

$$\overline{\iint} d s\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \eta}-\frac{\partial M}{\partial \zeta}\right) \cos (n_i, x)+\left(\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial N}{\partial \xi}\right) \cos (n_i, y) + \left(\frac{\partial M}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta}\right) \cos (n_i, z)\right\}$$

erstreckt über die von ihnen gebildete geschlossene Oberfläche, wenn n_i die in das Innere des eingeschlossenen Raumes weisende Normale ist. Nach dem Gauss'schen Satz läfst sich das letztere in das Raumintegral

$$-\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial N}{\partial \eta}-\frac{\partial M}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial M}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta}\right)\right\} d \xi\, d \eta\, d \zeta$$

verwandeln, welches verschwindet, weil der Integrand, die Divergenz eines Wirbels, identisch Null ist.

Nach (243 a) können wir für den Wirbel die Definition geben, dafs seine zum Flächenelement ds normale Componente gleich dem Verhältnifs des für den Umfang von ds gebildeten Linienintegrals $\overline{\int}(L\, d\xi + M\, d\eta + M\, d\zeta)$ zum Inhalt von ds ist. Die analoge Definition für die Divergenz lautet, dafs sie das Verhältnifs des Flächenintegrals $-\overline{\iint} d s\,(L \cos (n_i, x) + M \cos (n_i, y) + N \cos (n_i, z))$, gebildet über die Begrenzung des Volumelements, zu dem Volumelement selbst ist. Betrachten wir nun ein Element einer Unstetigkeitsfläche; wir können die x-Axe seiner Normalen parallel wählen. Berechnen wir nach dieser Definition die Wirbelcomponente, welche senkrecht zu einem unendlich kleinen, sehr langgestreckten, von der Unstetigkeitsfläche halbirten Rechteck mit den Seiten $d\xi$, $d\eta$ ist (siehe Figur 29), so findet man unter Vernachlässigung des von $d\xi$ herrührenden Theils des Linienintegrals den Werth

$$\frac{(M_1 - M_2)\, d\eta}{d\xi\, d\eta},$$

$d\xi$ $d\eta$

Fig. 29.

der unendlich ist wie $\frac{1}{d\xi}$. Das Entsprechende geschieht, wenn man die Divergenz für eine unendlich kleine, sehr flache von der Unstetigkeitsfläche halbirte Kapsel berechnet, deren

Höhe $d\xi$ und deren Grundfläche $d\eta\, d\zeta$ ist; denn man findet sie gleich

$$\frac{(L_1 - L_2)\, d\eta\, d\zeta}{d\xi\, d\eta\, d\zeta}.$$

Wir wissen nun schon (vergl. § 23), dafs man, um diesen unendlichen Werth der Divergenz zu umgehen, den Begriff der Flächendivergenz bildet, indem man nicht durch das Volumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, sondern durch das Flächenelement $d\eta\, d\zeta$ dividirt. Dementsprechend gelangen wir zur Definition des Flächenwirbels, wenn wir anstatt durch das Flächenelement $d\xi\, d\eta$ durch das Linienelement $d\eta$ dividiren. $L_1 - L_2$ findet man so als Werth der Flächendivergenz, $M_1 - M_2$ und ebenso $N_1 - N_2$, d. h. den Sprung der Tangentialcomponenten, als den Betrag der x- und der y-Componente des Flächenwirbels. Seine x-Componente ist 0; seine Richtung liegt also stets in der Fläche. Wie aus seiner Definition hervorgeht, ist er der Grenzfall starker räumlicher Wirbel; machen wir im Folgenden, wie wir es thun wollen, von dem Princip der stetigen Uebergänge Gebrauch, so können wir von ihm absehen. Es sei nur erwähnt, dafs im STOKES'schen Satz im Allgemeinen zum Flächenintegral des räumlichen Wirbels ein Linienintegral des Flächenwirbels hinzutritt.

Zum Schlufs dieses Paragraphen geben wir noch zwei Beispiele für die Anwendung des STOKES'schen Satzes (243 a). Verstehen wir unter L, M, N wieder die Componenten der magnetischen Kraft, so folgt aus (239) und (224) für einen den Strom I umschlingenden Weg:

$$\overline{\int}(L\,d\xi + M\,d\eta + N\,d\zeta) = \frac{4\pi}{A}\iint ds\,(u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,x))$$

$$= \frac{4\pi}{A}\iint ds\, q_n = \frac{4\pi}{A} I,$$

was uns zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung zurückführt, da $\frac{I}{A}$, die elektromagnetisch gemessene Stromstärke, gleich dem Moment der äquivalenten Doppelfläche ist. Das andere Beispiel bezieht sich auf die Deutung des NEUMANN'schen Potentials für die Wechselwirkung zwischen einem linearen Strom I und einem beliebigen Stromsystem, dessen magnetische Feldstärke mit L_1, M_1, N_1, und dessen Vectorpotential mit U_1, V_1, W_1 bezeichnet werden soll. Formel (241 a) ergiebt, wenn dl das Linienelement, dQ der Querschnitt des linearen Leiters ist, vermöge den Substitutionen

$$u\, dQ\, dl = q\, dQ \cos(x, dl)\, dl = I\, dx$$

für $u\,dx\,dy\,dz$ etc. (vergleiche den Anfang von § 64)

$$P = -\frac{I}{A}\overline{\int}(U_1\,dx + V_1\,dy + W_1\,dz). \tag{244}$$

Daraus folgt nach (243 a) und (237 a)

$$\begin{aligned}P = &-\frac{I}{A}\iint ds\left\{\left(\frac{\partial W_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial W_1}{\partial x}\right)\cos(n,y)\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right\}\\ = &-\frac{I}{A}\iint ds\,(L_1\cos(n,x) + M_1\cos(n,y) + N_1\cos(n,z)),\end{aligned}$$

d. h. das Potential der Wechselwirkung ist gleich der Anzahl der Kraftlinien, welche das Stromsystem durch die Stromcurve des Stromes I hindurchsendet, wenn als positiv eine Kraftlinie gerechnet wird, welche durch die Stromschleife in entgegengesetztem Sinne hindurchführt, wie die Kraftlinien des Stromes I selbst. Denn die Richtung von n fällt mit dem Richtungssinn der letzteren zusammen. Dies Ergebnifs steht in Einklang mit dem entsprechenden für die Wechselwirkung zwischen einem linearen Strom und einem Magnetsystem, das wir in § 62 ableiteten; und so mufs es ja auch sein, wenn anders der lineare Strom einer magnetischen Doppelschicht äquivalent sein soll.

§ 67. Die Ampère'sche Magnetismushypothese; das Vectorpotential eines magnetischen Körpers.

Nach (230b) ist

$$\varphi = \frac{I}{A}\iint ds\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$$

die Potentialfunction des magnetischen Feldes eines linearen Stromes. Rückt der Punkt ξ, η, ζ in eine gegen die Dimensionen der Stromcurve grofse Entfernung von ihr, so kann man in der Gleichung

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\Big(\cos(x,r)\cos(x,n) + \cos(y,r)\cos(y,n) + \cos(z,r)\cos(z,n)\Big)$$

r und seine Richtungscosinus für die Integration über die Ampère'sche Fläche als constant betrachten und findet

$$\varphi = -\frac{I}{A r^3}\left(\cos(r,x)\iint ds\cos(n,x) + \cos(r,y)\iint ds\cos(n,y) + \cos(r,z)\iint ds\cos(n,z)\right).$$

Dies ist aber die Potentialfunction eines Dipols, bei welchem (vgl. 190b)

$$\frac{I}{A}\iint ds\cos(n,x), \qquad \frac{I}{A}\iint ds\cos(n,y), \qquad \frac{I}{A}\iint ds\cos(n,z)$$

die Componenten des Moments sind. Auf grofse Entfernungen ist der Strom also einer magnetisirten Molekel äquivalent. AMPÈRE gründete hierauf die Hypothese, dafs aller Magnetismus auf moleculare elektrische Ströme zurückzuführen ist. In der That ist es dann ohne Weiteres verständlich, warum es nicht gelingt, positiven und negativen Magnetismus von einander zu trennen. Doch hat diese Vorstellung den Nachtheil, dafs diese Molekularströme im Gegensatz zu den sonst bekannten keinen Energieumsatz bewirken, d. h. weder JOULE'sche Wärme produciren, noch durch die Arbeit elektromotorischer Kräfte unterhalten werden müssen. Da die Aequivalenz von Strom und Doppelfläche innerhalb der letzteren versagt, würde eine Beobachtung des magnetischen Feldes in einer Molekel zwar die Entscheidung zwischen der AMPÈRE'schen und der bisher angewandten Vorstellung zulassen; da sie aber nicht möglich ist, ist eine directe empirische Entscheidung überhaupt ausgeschlossen.

Nun haben wir in § 65 das magnetische Feld eines Stromsystems durch ein Vectorpotential darzustellen gelernt. Ist der aus magnetisirten Molekeln bestehende magnetisirte Körper aber einem System elektrischer Ströme äquivalent, so mufs die von ihm hervorgerufene Feldstärke auch durch ein Vectorpotential darstellbar sein; man braucht nur das Vectorpotential des Dipols zu bilden und über alle Dipole zu summiren. Wenn wir dies durchzuführen versuchen, stofsen wir auf dieselbe Schwierigkeit, die schon in § 49 auftrat, dafs nämlich die Magnetisirung der Molekeln eine unstetige, noch dazu in unbekannter Weise springende Function des Ortes ist. Man mufs defshalb auch hier wieder zur Mittelwerthbildung über alle Molekeln, die ein kleines Volumen $dx\,dy\,dz$ erfüllen, schreiten. Dabei verwischt sich aber der Unterschied zwischen den Räumen zwischen den Molekeln, in denen die Darstellung des Feldes durch ein Vectorpotential möglich sein mufs, und zwischen dem Inneren der Molekeln,

wo dies nicht der Fall ist. So kommt es, dafs das Vectorpotential im ganzen vom magnetisirten Körper erfüllten Volumen die Feldstärke nicht richtig wiedergiebt, während es im Aufsenraume zu denselben Resultaten führt, wie wenn man vom scalaren Potential φ ausgeht.

Wir machen von dem Princip der stetigen Uebergänge Gebrauch und behaupten, dafs

$$\left.\begin{aligned} U' &= \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ V' &= \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) dx\, dy\, dz \\ W' &= \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

die Componenten des Vectorpotentials des magnetisirten Körpers sind. Wir brauchen, um dies zu beweisen, nur zu zeigen, dafs im Aufsenraum die Componenten der Feldstärke durch die Gleichungen [vgl. (237 a)]

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\partial W'}{\partial \eta} - \frac{\partial V'}{\partial \zeta} \\ M &= \frac{\partial U'}{\partial \zeta} - \frac{\partial W'}{\partial \xi} \\ N &= \frac{\partial V'}{\partial \xi} - \frac{\partial U'}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \tag{245a}$$

bestimmt sind, und dafs in Analogie zu (238b) die Divergenz

$$\frac{\partial U'}{\partial \xi} + \frac{\partial V'}{\partial \eta} + \frac{\partial W'}{\partial \zeta} = 0$$

ist.

Beides sieht man leicht ein, wenn man (245) durch partielle Integration umformt und dann $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$ mit $-\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$ etc. vertauscht. So findet man

$$U' = -\iiint \left(\nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint \left(\nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dx\, dy\, dz$$

etc., also

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \\ V' &= \frac{\partial \Lambda}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ W' &= \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta}, \end{aligned}\right\} \qquad (245\,\mathrm{b})$$

wenn man

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= \iiint \frac{\lambda}{r}\, dx\, dy\, dz \\ M &= \iiint \frac{\mu}{r}\, dx\, dy\, dz \\ N &= \iiint \frac{\nu}{r}\, dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \qquad (246)$$

setzt. Allein aus der Form von (245 b) folgt, dafs die zweite der genannten Forderungen erfüllt ist. Dagegen mufs man (245 b) in 245 a) substituiren, um zu sehen, dafs L, M, N die Componenten der Feldstärke sind. Man findet so

$$L = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right) - \Delta \Lambda.$$

Da nun aber nach (246)

$$\Delta \Lambda = -4 \pi \lambda,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial \zeta} = \iiint \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= -\iiint \left(\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= -\varphi \qquad (246\,\mathrm{a})$$

[φ das scalare Potential des magnetisirten Körpers; siehe (198 a)] ist, so folgt für den Aufsenraum, in welchem λ verschwindet:

$$L = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

was zu beweisen war. Im Magneten dagegen ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W'}{\partial \eta} - \frac{\partial V'}{\partial \zeta} &= L + 4\pi\lambda \\ \frac{\partial U'}{\partial \zeta} - \frac{\partial W'}{\partial \xi} &= M + 4\pi\mu \\ \frac{\partial V'}{\partial \xi} - \frac{\partial U'}{\partial \eta} &= N + 4\pi\nu\end{aligned}\right\} \tag{245c}$$

Diese Gleichungen gelten, wenn Ströme fehlen. Sind hingegen nur Ströme als Erreger des magnetischen Feldes vorhanden, so ist nach (237a)

$$L + 4\pi\lambda = L = \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}$$
etc.,

so dafs im allgemeinsten Fall des Zusammenwirkens von Strömen und magnetisirten Körpern

$$\left.\begin{aligned}L + 4\pi\lambda &= \frac{\partial (W + W')}{\partial \eta} - \frac{\partial (V + V')}{\partial \zeta} \\ M + 4\pi\mu &= \frac{\partial (U + U')}{\partial \zeta} - \frac{\partial (W + W')}{\partial \xi} \\ N + 4\pi\nu &= \frac{\partial (V + V')}{\partial \xi} - \frac{\partial (U + U')}{\partial \eta}.\end{aligned}\right\} \tag{245d}$$

Es folgt hieraus für den vorliegenden, allgemeinsten Fall die Gleichung

$$\frac{\partial (L + 4\pi\lambda)}{\partial \xi} + \frac{\partial (M + 4\pi\mu)}{\partial \eta} + \frac{\partial (N + 4\pi\nu)}{\partial \zeta} = 0, \tag{245e}$$

die gemäfs (201a) die Nichtexistenz wahrer magnetischer Ladung ausspricht.

Aber noch in anderer Weise spielt das Vectorpotential U', V', W' dieselbe Rolle wie das Vectorpotential U, V, W. In § 52 zeigten wir, dafs das Potential der Wechselwirkung zwischen einem Dipol und einem durch die Potentialfunction φ dargestellten Kraftfeld gleich

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -(\lambda L + \mu M + \nu N)$$

ist. Für das magnetische Feld von Strömen läfst sich dies zunächst nur beweisen, wenn sich der Dipol aufserhalb des Strom-

gebietes befindet; sonst existirt ja keine Potentialfunction. Liegt er aber im Stromgebiet, so wollen wir zunächst die Strömung in dem durch ihn führenden Stromfaden aufgehoben denken. Dann gilt die Gleichung. Stellen wir sie nun wieder her, so macht das für die Werthe von L, M, N nach (237a) nur unendlich wenig aus; denn die dort auftretenden Integrale $\iiint v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} dx\, dy\, dz$ haben dieselbe Form, wie in der Elektrostatik die Ausdrücke für die Componenten der von Raumladungen herrührenden Kraft. Für diese wurde aber schon in § 11 der entsprechende Satz bewiesen. Also ist ganz allgemein das Potential der Wechselwirkung zwischen einem magnetisirten Körper und einem Stromsystem gleich

$$P = -\iiint (\lambda L + \mu M + \nu N)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

L, M, N sind hier die Componenten der allein von den Strömen herrührenden Feldstärke. Wir setzen nach (237a) ihre Werthe ein, wenden dann partielle Integration an, wobei Flächenintegrale wegen der Voraussetzung stetiger Uebergänge nicht auftreten, und finden so, wenn wir dann noch (238) hinzunehmen:

$$\begin{aligned}
P = &-\iiint \left\{ \lambda \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\qquad \left. + \nu \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
= &-\iiint \left\{ U \left(\frac{\partial \nu}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) + V \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\qquad \left. + W \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
= &-\frac{1}{A} \iiiiiint \frac{1}{r} \left\{ u \left(\frac{\partial \nu}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) + v \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\qquad \left. + w \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} - \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right) \right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

Nach (245) gilt also für das Potential der Wechselwirkung magnetisirter Körper und elektrischer Ströme die Formel

$$P = -\frac{1}{A} \iiint (U'u + V'v + W'w)\, dx\, dy\, dz$$

in der U', V', W', d. h. das Vectorpotential des magnetisirten Körpers genau dieselbe Rolle spielt, wie U_1, V_1, W_1 in der Gleichung (241a). Handelt es sich demnach um die Wechselwirkung zwischen einem Stromsystem (u, v, w) mit einem anderen u_1, v_1, w_1, dessen Vectorpotential U_1, V_1, W_1 ist und zugleich mit Magneten, so ist das Potential

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{1}{A}\iiint\left((U_1+U')u+(V_1+V')v+(W_1+W')w\right)dx\,dy\,dz \\ &= -\frac{1}{A}\iiint\left[\left(U_1+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)u+\left(V_1+\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)v\right. \\ &\qquad\left.+\left(W_1+\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)w\right]dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (247)$$

[Vgl. (245b).]

Für einen linearen Strom I gilt analog zu (244):

$$\left.\begin{aligned} P = -\frac{I}{A}\overline{\int}\left[\left(U_1+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)dx+\left(V_1+\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy\right. \\ \left.+\left(W_1+\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dz\right] \end{aligned}\right\} \quad (247a)$$

Dies gilt noch ohne jede Einschränkung; woher auch die Magnetisirung stammen mag, immer ist $-\delta P$ die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte bei einer Verschiebung des vom Strom u, v, w durchflossenen Leiters. Jetzt aber schliefsen wir permanenten Magnetismus aus und betrachten U_1', V_1', W_1' als das Vectorpotential desjenigen Antheils der Magnetisirung, der von der Strömung u_1, v_1, w_1 allein inducirt ist; dann wird

$$P = -\frac{1}{A}\iiint\left\{(U_1+U_1')u+(V_1+V_1')v+(W_1+W_1')w\right\}dx\,dy\,dz$$

das Potential der Wechselwirkung zwischen beiden Stromsystemen. Denn $-\delta P$ ist jetzt die Arbeit derjenigen am Gebiet der Strömung u, v, w angreifenden Kräfte, die ihr Dasein der Strömung u_1, v_1, w_1 verdanken. Dafs P seinen Werth nicht ändert, wenn man hier die Rollen der beiden Strömungen vertauscht, erkennt man, indem man ihre Antheile an der magnetischen Feldstärke als L, M, N und L_1, M_1, N_1 von einander unterscheidet. Die Anwesenheit magnetisirter Körper hat nach § 66 auf die Gröfse ihrer Wirbel keinen Ein-

flufs; deshalb gelten ganz allgemein für den ersteren Antheil die Formeln (239)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{4\pi}{A} u$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4\pi}{A} v$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{4\pi}{A} w.$$

Benutzt man sie in der letzten Gleichung für P, so geht diese in Hinsicht auf (245d) über in:

$$P = -\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{(U_1+U_1')\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + (V_1+V_1')\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + (W_1+W_1')\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\right\} dx\, dy\, dz$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{L\left(\frac{\partial(W_1+W_1')}{\partial y} - \frac{\partial(V_1+V_1')}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial(U_1+U_1')}{\partial z} - \frac{\partial(W_1+W_1')}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial(V_1+V_1')}{\partial x} - \frac{\partial(U_1+U_1')}{\partial y}\right)\right\} dx\, dy\, dz$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iiint\{L(L_1+4\pi\lambda_1)+M(M_1+4\pi\mu_1)+N(N_1+4\pi\nu_1)\}dx\,dy\,dz.$$

Nun ist aber nach (203a)

$$L_1 + 4\pi\lambda_1 = (1 + 4\pi\varkappa) L_1\,;$$

also findet man für P die für beide Strömungen symmetrische Gleichung:

$$P = -\frac{1}{4\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L L_1 + M M_1 + N N_1)\, dx\, dy\, dz.$$

Läfst man sie mit einander identisch werden, so wird aus P das Selbstpotential der Strömung, nur mufs man, wie schon früher in ähnlichen Fällen, den Factor $\frac{1}{2}$ hinzufügen. Denn man zählt dann die Wechselwirkung zwischen zwei Stromfäden 1 und 2 insofern doppelt, als man einmal den Beitrag des Stromfadens 1 zu $(U_1 + U_1')$ etc. berechnet und das Integral $\iiint\left\{(U_1 + U_1')u + \ldots + \ldots\right\} dx\, dy\, dz$ für

das Volumen des anderen bildet, das zweite Mal aber umgekehrt verfährt. Also ist

$$P = -\frac{1}{2A}\iiint\left\{(U+U')u+(V+V')v+(W+W')w\right\}dx\,dy\,dz \quad (247\text{b})$$

das Selbstpotential eines beliebigen Stromsystems bei Anwesenheit magnetisirbaren Substanzen.

Ist die Magnetisirungszahl $\varkappa$ in der ganzen in Betracht kommenden Umgebung des Stromsystems constant, so ist nach (203a) und (239)

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z} = \varkappa\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) = \frac{4\pi\varkappa}{A}u,$$

und nach (245) und (238)

$$U' = \iiint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \frac{4\pi\varkappa}{A}\iiint\frac{u}{r}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\varkappa U$$

also, wenn man diese und die entsprechenden Beziehungen für V' und W' in (247b) einsetzt:

$$P = -\frac{1+4\pi\varkappa}{2A}\iiint(Uu+Vv+Ww)\,dx\,dy\,dz,$$

d. h. das Selbstpotential ist proportional zur magnetischen Permeabilität $1+4\pi\varkappa$. Dasselbe gilt von den ponderomotorischen Kräften zwischen Strömen, im Gegensatz zu den Kräften zwischen Ladungen. Denn nach § 52ff. sind diese umgekehrt proportional zu $1+4\pi\varkappa$. Auch in diesem Punkte versagt die Aequivalenz linearer Ströme mit Doppelschichten.

§ 68. Die Energie des magnetischen Feldes elektrischer Ströme.

In § 54 [Gleichung (211d)] fanden wir für die Energie des magnetischen Feldes im Gleichgewichtszustand den Werth

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Zwar war er nur unter der Voraussetzung der Existenz einer Potentialfunction abgeleitet. Stellt man sich aber auf den Standpunkt, daſs das Energiequantum

$$\frac{1}{8\pi}(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz$$

im Volumelement $dx\,dy\,dz$ localisirt ist, wie es die FARADAY-MAXWELL'sche Auffassung thut, so mufs man diese Gleichung als allgemein gültig betrachten, denn es läfst sich ja an dem Zustand in diesem Element noch nicht entscheiden, ob eine solche Function existirt oder nicht. Wir behalten diese Gleichung daher unter Berufung auf die Erfahrung auch hier bei und wenden sie sogleich auf den allgemeinsten Fall an, dafs sowohl elektrische Ströme als permanent und temporär magnetisirte Körper auftreten.

An der Feldstärke unterscheiden wir durch die Indices 1 und 2 die Antheile, welche einerseits von den permanenten Magneten allein, andererseits von den Strömen allein herrühren. Dann ist

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_{12} + \mathfrak{W}_2,$$

wo

$$\mathfrak{W}_1 = \frac{1}{8\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L_1^2 + M_1^2 + N_1^2)\,dx\,dy\,dz$$

die Energie des von den Magneten allein erregten Feldes ist, während

$$\mathfrak{W}_2 = \frac{1}{8\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L_2^2 + M_2^2 + N_2^2)\,dx\,dy\,dz$$

die Energie des Stromsystems allein angiebt. Der dritte Summand

$$\mathfrak{W}_{12} = \frac{1}{4\pi}\iiint(1 + 4\pi\varkappa)(L_1\,L_2 + M_1\,M_2 + N_1\,N_2)\,dx\,dy\,dz$$

entspricht der Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten. Wir berechnen zunächst den Werth des letztgenannten.

L_2, M_2, N_2 ist die Feldstärke, welche beim Fehlen permanenter Magnetisirung aufträte; wir können also nach (203a)

$$(1 + 4\pi\varkappa)\,L_2 = L_2 + 4\pi\,\lambda_2 \quad \text{etc.}$$

setzen, während sich L_1 aus der Potentialfunction φ der permanenten Magnetisirung und der von ihr inducirten gemäfs den Gleichungen

$$L_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

ableitet. Defshalb ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_{12} &= -\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{(L_2 + 4\pi\lambda_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (M_2 + 4\pi\mu_2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ &\qquad\qquad + (N_2 + 4\pi\nu_2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big\}\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint\varphi\Big\{\frac{\partial(L_2 + 4\pi\lambda_2)}{\partial x} + \frac{\partial(M_2 + 4\pi\mu_2)}{\partial y} \\ &\qquad\qquad + \frac{\partial(N_2 + 4\pi\nu_2)}{\partial z}\Big\}\,dx\,dy\,dz \\ &= 0.\end{aligned}$$

Denn, wie des öfteren erwähnt [vergl. (245 e)], verschwindet die Divergenz des Vectors mit den Componenten $L + 4\pi\lambda$, $dl + 4\pi\mu$, $N + 4\pi\nu$ überall; Flächenintegrale treten bei der soeben ausgeführten partiellen Integration aber nicht auf, weil wir Stetigkeit aller Uebergänge annahmen und im Unendlichen φ mindestens wie $\frac{1}{R}$, $L + 4\pi\lambda = L$ etc. aber mindestens wie $\frac{1}{R^2}$ abnimmt.

Aehnlich berechnen wir $\mathfrak{W}_2$, indem wir nach (203 a) und (245 d)

$$(1 + 4\pi\varkappa) L_2^2 = (L_2 + 4\pi\lambda_2) L_2 = L_2 \left(\frac{\partial (W + W')}{\partial y} - \frac{\partial (V + V')}{\partial z} \right)$$

etc.

setzen. Dann folgt mittelst partieller Integration ähnlich wie im vorigen Paragraphen (S. 360):

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_2 = \frac{1}{8\pi} \iiint \Big\{ & L_2 \left(\frac{\partial (W + W')}{\partial y} - \frac{\partial (V + V')}{\partial z} \right) \\ & + M_2 \left(\frac{\partial (U + U')}{\partial z} - \frac{\partial (W + W')}{\partial x} \right) \\ & + N_2 \left(\frac{\partial (V + V')}{\partial x} - \frac{\partial (U + U')}{\partial y} \right) \Big\} \, dx\, dy\, dz \\ = \frac{1}{8\pi} \iiint \Big\{ & (U + U') \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial M_2}{\partial z} \right) + (V + V') \left(\frac{\partial L_2}{\partial z} - \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \\ & + (W + W') \left(\frac{\partial M_2}{\partial x} - \frac{\partial L_2}{\partial y} \right) \Big\} \, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (239), die wir zunächst nur unter der Voraussetzung der Abwesenheit magnetisirbarer Körper abgeleitet haben, sind nun aber allgemein gültig, weil sich der von den letzteren herrührende Antheil an der Feldstärke aus einer Potentialfunktion ableiten läſst, demnach wirbelfrei ist. Also wird nach (247 b)

$$\mathfrak{W}_2 = \frac{1}{2A} \iiint \Big\{ (U + U') u + (V + V') v + (W + W') w \Big\} \, dx\, dy\, dz = - P. \quad (247\,\text{c})$$

Obwohl bei der Verschiebung eines Stromes gegen einen Magneten von den ponderomotorischen Kräften Arbeit geleistet wird, ändert sich also die Energie des magnetischen Feldes nicht, da $\mathfrak{W}_{12}$ dauernd gleich 0 ist. Und verschieben wir zwei Stromsysteme gegen

einander, so ist sogar diese durch $-\delta P$ gemessene Arbeit gleich der Zunahme der Energie. Das erscheint zunächst als Widerspruch gegen das Energieprincip. Doch ist zu bedenken, dafs allen Erörterungen dieses Abschnittes die Voraussetzung constanter Stromstärken zu Grunde liegt, und diese lassen sich bei einer Verschiebung nur durch Energiezufuhr constant erhalten. Das führt uns zu den im nächsten Abschnitt zu behandelnden Inductionserscheinungen.

Zweiter Abschnitt.

Elektromagnetische Schwingungen.

§ 69. Induction.

Im Gegensatz zu allem Bisherigen gehen wir jetzt zu zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern, also zu Schwingungen im weitesten Sinn des Wortes über. Es ist zu erwarten, dafs wir dabei auf gänzlich Neues stofsen werden, und es kann zweifelhaft scheinen, ob wir die bisherigen Ergebnisse überhaupt noch verwenden können. Nun sind aber stationäre Zustände nur Grenzfälle sehr langsamer zeitlicher Veränderungen. Für hinreichend langsame Schwingungen müssen die bisherigen Resultate also gültig bleiben; dafs sie es sind, wollen wir in diesem Paragraphen voraussetzen. Dadurch ist für den Geltungsbereich des Folgenden eine Grenze gegeben; wo sie liegt, kann erst später entschieden werden.

Wird in einem linearen Stromkreis ein stationärer Strom I von elektromotorischen Kräften im Gesammtbetrage E unterhalten, so folgt aus der Anwendung der Gleichung (225 b) auf die geschlossene Stromcurve

$$E = I w,$$

da $\varphi_1 = \varphi_2$ ist; und hieraus durch Multiplication mit $I dt$:

$$E I dt = I^2 w \, dt$$

(vgl. § 61). Die Arbeit der elektromotorischen Kräfte ist gleich der vom Strom erzeugten JOULE'schen Wärme.

Nun verschieben wir aber einen Magneten gegen den Stromkreis. Nach (230 d) wird dabei, wenn I constant bleibt, die Arbeit:

$$-\frac{dP}{dt} dt = -I \frac{d\psi}{dt} dt$$

geleistet, wenn wir zur Abkürzung

$$\psi = \frac{1}{A}\iint ds \sum \mathfrak{m} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial I}$$

setzen. Die Energie des magnetischen Feldes ändert sich nach § 68 aber nicht. Dem Energieprincip zufolge mufs dies Arbeitsquantum defshalb im Stromkreis geleistet werden, und zwar ist die einzige mögliche Art die, dafs die elektromotorische Kraft E verstärkt wird. Der Betrag der notwendigen Verstärkung berechnet sich aus der Forderung

$$E I dt = \left(I^2 w - I \frac{d\psi}{dt}\right) dt,$$

indem wir durch Idt dividiren, so dafs

$$E = Iw - \frac{d\psi}{dt}$$

entsteht, zu $-\frac{d\psi}{dt}$. Demnach ist

$$+\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) \tag{248}$$

die durch Bewegung des Magneten inducirte elektromotorische Kraft, zu deren Ueberwindung der E ertheilte Zuwachs dient. Sie ist von I unabhängig und tritt erfahrungsgemäfs auch dann ein, wenn $I = 0$ ist, obwohl unsere Schlufsweise wegen der Division durch Idt in diesem Fall versagt. Ist sie positiv, so wirkt sie in derselben Richtung wie E, oder da E das in der Stromrichtung genommene Integral der localen elektromotorischen Kräfte ist, in dieser.

Auf Grund der Aequivalenz von Strömen und Magneten können wir dies Ergebnifs auch auf die Verrückung übertragen, welche zwei lineare Ströme im Vacuum gegen einander erfahren. Ihr Potential auf einander ist nach (235)

$$P = -\frac{IJ}{A^2}\overline{\int}\overline{\int}\frac{1}{r}\cos(dl, d\lambda)\, dl\, d\lambda = -IJp$$

wo p eine nur von den geometrischen Verhältnissen abhängige Constante, den gegenseitigen Inductionscoefficienten der Stromkreise, bedeutet. Halten wir beide Stromstärken constant, so ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) &= -J\frac{dp}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial J}\right) &= -I\frac{dp}{dt}\end{aligned}\right\} \quad (248\text{a})$$

die im Stromkreis von I,

die im Stromkreis von J inducirte elektromotorische Kraft.

Das Potential P kann sich aber auch auf andere Weise ändern, nämlich durch Stromschwankungen. Auch dann wird man in Verallgemeinerung des Ergebnisses (248) und in Uebereinstimmung mit der Erfahrung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) = -p\frac{dJ}{dt}$$

als die im Stromkreis I inducirte elektromotorische Kraft ansehen, so dafs beim Zusammenwirken beider Ursachen daselbst

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) = -J\frac{dp}{dt} - p\frac{dJ}{dt} \quad (248\text{b})$$

inducirt wird. Auf die Selbstinduction können wir an dieser Stelle noch nicht schliefsen; denn bei der Ableitung wurde der Strom I als constant betrachtet. Wir werden das weiter unten nachholen.

Ist bei der Verschiebung eines Magneten $\frac{d\psi}{dt} > 0$, so mufs die Bewegung durch Zuführung von Arbeit gegen die ponderomotorischen Kräfte erzwungen werden, die Induction sucht dann I und die ihm proportionalen Kräfte zu vergröfsern, die Bewegung zu hemmen; ist $\frac{d\psi}{dt} < 0$, so sucht sie die ponderomotorischen Kräfte, die dann die Bewegung selbst unterhalten, zu schwächen, wirkt also wiederum hemmend (Lenz'sche Regel). Nach § 62 und § 66 ist P proportional zu der Anzahl der Kraftlinien, welche der Magnet oder der Strom J durch die Stromschleife von I entsendet. Daraus ergiebt sich die Faraday'sche Form des Inductionsgesetzes, dafs die inducirte Kraft proportional zur zeitlichen Aenderung dieser Zahl ist. Dabei macht es aber einen wesentlichen Unterschied, ob die Induction durch Verschiebung oder durch Stromverstärkung hervorgerufen wird. In dem ersteren Fall kann sich die Zahl der Kraftlinien nur dadurch ändern, dafs einige von ihnen unter Durchschneidung der Stromcurve in die Stromschleife ein- oder austreten; denn ihre Gesammtzahl bleibt unverändert. Bei der Stromverstärkung aber vermehrt sich

ihre Gesammtzahl und es tritt Induction ein, ohne dafs die Stromcurve von Kraftlinien geschnitten würde. Besonders deutlich tritt dies hervor, wenn der inducirende Strom in einem in sich geschlossenen Solenoïd verläuft. Sein magnetisches Kraftfeld liegt dann ganz im Innenraum des Solenoïds. Trotzdem ruft jede Aenderung seiner Intensität in einem das letztere umschlingenden Draht Induction hervor. Dagegen ist hier Induction durch Verschiebung unmöglich, wie auch keine ponderomotorischen Kräfte auftreten. Der Inductionscoefficient p bleibt in diesem Fall bei jeder möglichen Verrückung unverändert.

Während der Schlufs auf (248a) und (248b) ein nur durch die Uebereinstimmung mit der Erfahrung in Strenge zu rechtfertigender Analogieschlufs war, läfst sich die Theorie der Selbstinduction wieder aus dem Energieprincip ableiten. Die magnetische Energie eines einzelnen Stromes I ist proportional zu I^2, da die Feldstärke proportional zu I ist; das heifst nach (247c):

$$\mathfrak{W} = -P = \tfrac{1}{2} p I^2,$$

wo p eine stets positive Constante, der sogenannte Selbstinductionscoefficient ist. Wird der Stromkreis bei constanter Stromstärke deformirt, so wird die Arbeit $-\frac{dP}{dt}dt$ von den ponderomotorischen Kräften geleistet, während die magnetische Energie um den gleichen Betrag wächst. Daher mufs die den Strom treibende elektromotorische Kraft so verstärkt werden, dafs sie $-2\frac{dP}{dt}dt$ mehr Arbeit leistet, als JOULE'sche Wärme erzeugt wird, d. h. es mufs

$$EI\,dt = \left(I^2 w - 2\frac{dP}{dt}\right)dt = \left(I^2 w + I^2\frac{dp}{dt}\right)dt$$

oder

$$E = Iw + I\frac{dp}{dt}$$

sein. $-I\frac{dp}{dt}$ ist demnach die inducirte elektromotorische Kraft.

Aendert sich andererseits P durch eine Schwankung des Stroms I, so verlangt das Energieprincip, dafs die Arbeit der elektromotorischen Kraft gleich der Zunahme der magnetischen Energie plus der erzeugten JOULE'schen Wärme ist; also:

$$EI\,dt = \left(\frac{d\mathfrak{W}}{dt} + I^2 w\right)dt,$$

denn andere Energiearten treten dabei nicht auf. Setzt man hier $\mathfrak{W} = \frac{1}{2} p I^2$, so folgt

$$E = I w + p \frac{dI}{dt} \cdot \tag{248c}$$

$-p \frac{dI}{dt}$ ist also die durch Stromschwankung inducirte Kraft. Wirken beide Ursachen zusammen, so bekommt sie den Betrag:

$$-p \frac{dI}{dt} - I \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial I} \right) \tag{248d}$$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so sehen wir, dafs die inducirte elektromotorische Kraft stets gleich $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)$ ist, wo P einmal das Potential des Stromes auf einen Magneten, das andere Mal sein Potential auf andere Ströme, das dritte Mal sein Selbstpotential ist. Da influenzirter Magnetismus von wechselnder Stärke nach § 67 ebenso wie ein variabler Strom wirkt, ist auch seiner Inductionswirkung dieselbe Gröfse beizulegen. Das Potential eines aus permanent und durch Influenz magnetisirten Körpers, sowie aus elektrischen Strömen bestehenden Systems setzt sich aber additiv aus diesen Theilen zusammen; bezeichnen wir es jetzt allein mit P, so wird

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial I} \right) \tag{248 e}$$

in allen Fällen die im Stromkreis von I inducirte elektromotorische Kraft.

Integrirt man diesen Ausdruck nach der Zeit von t_1 bis t_2, so erhält man als Zeitintegral der inducirten Kraft:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial I} \right)_2 - \left(\frac{\partial P}{d I} \right)_1,$$

d. h. einen vom Wege, auf dem die Veränderung vor sich ging, unabhängigen Werth. Für das Zeitintegral des inducirten Stromes, welches nach dem Ohm'schen Gesetz diesem Ausdruck proportional ist, gilt dasselbe.

Wir wären jetzt durchaus im Stande, den im vorhergehenden Paragraphen geforderten Beweis zu erbringen, dafs die Theorien der Elektrodynamik und Induction zusammen dem Energieprincip genügen. Wir ziehen aber vor, ihn auf eine spätere Gelegenheit zu verschieben und zunächst an Stelle dieser für langsame zeitliche

Veränderungen gültigen Gesetze die streng gültigen abzuleiten. Dann können wir erst beurtheilen, in wiefern wir überhaupt von dieser angenäherten Theorie verlangen können, dafs sie mit dem streng geltenden Energieprincip in Einklang steht.

Zu diesem Zwecke nehmen wir nun an, dafs der lineare Stromkreis I, in dem wir die Stärke der Induction berechnen wollen, ruht. Das Potential der Wechselwirkung zwischen ihm und anderen Strömen, sowie beliebig gelegenen permanent oder temporär magnetisirten Körpern ist nach (247a):

$$P = -\frac{I}{A}\overline{\int}\left[\left(U_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dx + \left(V_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dy + \left(W_1 + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right) dz\right],$$

die inducirte elektromotorische Kraft also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) = -\frac{1}{A}\overline{\int}\Big[&\frac{\partial}{\partial t}\left(U_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) dx \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left(V_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(W_1 + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right) dz\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (248\,e)$$

Wie man diese auf die Linienelemente des geschlossenen Stromkreises vertheilen will, ist natürlich in hohem Maafse willkürlich. Ist F eine beliebige Ortsfunction, so giebt jeder Ansatz von der Form

$$X = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(U_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) - \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(W_1 + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) - \frac{\partial F}{\partial z}$$

für das Linienintegral der inducirten elektrischen Kraft den verlangten Werth

$$\overline{\int}(X dx + Y dy + Z dz) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right).$$

Bildet man nun aber die Wirbelcomponenten der elektrischen Kraft, so fällt die Function F heraus; und man findet dann, indem man nach (245b)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = U'$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = V'$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} = W'$$

und nach (245 d)

$$\frac{\partial (W + W')}{\partial y} - \frac{\partial (V + V')}{\partial z} = L + 4\pi\lambda$$

$$\frac{\partial (U + U')}{\partial z} - \frac{\partial (W + W')}{\partial x} = M + 4\pi\mu$$

$$\frac{\partial (V + V')}{\partial x} - \frac{\partial (U + U')}{\partial y} = N + 4\pi\nu$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(L + 4\pi\lambda) \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(M + 4\pi\mu) \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(N + 4\pi\nu). \end{aligned}\right\} \qquad (249)$$

Die elektrische Kraft ist in zeitlich veränderlichen magnetischen Feldern also nicht mehr, wie bisher stets, wirbelfrei, vielmehr sind die Wirbelcomponenten der elektrischen Feldstärke gleich der zeitlichen Abnahme der Vectorcomponenten $L + 4\pi\lambda$, $M + 4\pi\mu$ und $N + 4\pi\nu$, dividirt durch die Lichtgeschwindigkeit A.

Wendet man auf die elektrische Feldstärke den STOKES'schen Satz [Gleichung (243 a)] an, so folgt aus (249)

$$\overline{\int}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\iint ds\{(L + 4\pi\lambda)\cos(n, x) + (M + 4\pi\mu)\cos(n, y) + (N + 4\pi\nu)\cos(n, z)\}$$

eine Gleichung, welche sich vermöge der soeben angewandten Formeln (245 b) und (245 d) in die Ausgangsgleichung dieser Betrachtung (248 e) umformen läſst. Beide sind also gleichwerthig. Ferner sieht man, daſs die FARADAY'sche Form des Induktionsgesetzes im Allgemeinen dahin zu ergänzen ist, daſs nicht die Veränderung der Anzahl der Kraftlinien, sondern der den Vector

$L + 4\pi\lambda$, $M + 4\pi\mu$, $N + 4\pi\nu$ darstellenden Linien die Stärke der inducirten elektromotorischen Kraft mißt.[1])

Die Gleichungen (249) sind nur unter der eingangs erwähnten Voraussetzung langsamer Veränderungen abgeleitet. Wir thun nun aber den entscheidenden Schritt, daß wir sie als allgemein gültig betrachten. Zu rechtfertigen ist er natürlich nur so, daß wir die Consequenzen aus ihm ziehen und sie mit der Erfahrung vergleichen.

§ 70. Ungeschlossene Ströme. Fernwirkung und endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen.

Das Analogon zu den Gleichungen (249) für das magnetische Feld bilden die Gleichungen (239)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{4\pi}{A} u$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4\pi}{A} v$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{4\pi}{A} w,$$

welche den Wirbel der magnetischen Kraft bestimmen. Sie können aber nicht allgemein gelten. Denn es folgt aus ihnen für die räumliche Divergenz der Stromdichte

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

und ebenso muß die Flächendivergenz verschwinden; denn legen wir die x-Axe in die Richtung der Normalen n_1, so folgt aus der Stetigkeit der Tangentialcomponenten der magnetischen Kraft (nach § 66 können wir diese als das Verschwinden des Flächenwirbels bezeichnen)

$$\frac{\partial (N_1 - N_2)}{\partial y} - \frac{\partial (M_1 - M_2)}{\partial z} = \frac{4\pi}{A}(u_1 - u_2) = 0;$$

u_1 und u_2 sind hier die Normalcomponenten der Strömung; bei anderer Lage des Coordinatensystems lautet diese Bedingung also

$$q_{n_1} + q_{n_2} = 0.$$

[1]) Aus diesem Grunde bezeichnet man diesen Vector jetzt auch durchgängig als „magnetische Induction". Der Herausgeber.

Diese mit (218a) und (218b) identischen Gleichungen sagen aus, dafs die Stromlinien geschlossen sind; das ist bei stationären Strömen stets der Fall, bei nichtstationären aber, wie sie beispielsweise bei dem Ladungsausgleich zwischen zwei auf verschiedenem Potential befindlichen Conductoren eintreten, wenn man sie leitend verbindet, trifft es sicher nicht zu. Es erhebt sich also die Frage nach der Elektrodynamik der ungeschlossenen Ströme: Wie sind die Gleichungen (239) zu ergänzen, damit sie allgemein gelten?

Diese Frage hat der Wissenschaft viele Schwierigkeiten bereitet; denn während sich die Gleichungen (249) für den Wirbel der elektrischen Kraft an den in geschlossenen Metalldrähten auftretenden Inductionsströmen leicht und genau empirisch prüfen lassen, giebt es kein ähnliches Mittel zur Untersuchung des Wirbels der magnetischen Kraft. Man mufste sich deshalb zunächst von einer Hypothese führen lassen, um auf diesem Gebiet vorwärts zu kommen. Sie besteht darin, dafs man nach einer Fortsetzung des elektrischen Stromes von den Grenzen der Conductoren, an denen er nach der bisherigen Auffassung aufhört, in das Dielektricum hinein sucht.

In einem geladene Conductoren umgebenden Dielektricum besteht elektrische Polarisation. Diese führten wir darauf zurück, dafs die elektrischen Ladungen der Molekeln, welche sich im Ruhezustand neutralisiren, unter dem Einflufs der Feldstärke scheiden. Aenderung der Polarisation ist danach Aenderung der Ladungsvertheilung in den Molekeln, d. h. ein Strömen der Elektricität; es liegt nahe, ihr dieselbe Beziehung zum magnetischen Feld zuzuschreiben, wie dem Leitungsstrom in leitenden Körpern.

Um diesen Gedanken mathematisch einzukleiden, denken wir uns die Ladung einer Molekel aus zwei entgegengesetzt gleichen Punktladungen $\pm \mathfrak{e}$ an den Orten x_+, y_+, z_+ und x_-, y_-, z_- bestehend;

$$\mathfrak{e}(x_+ - x_-), \quad \mathfrak{e}(y_+ - y_-), \quad \mathfrak{e}(z_+ - z_-)$$

sind die Componenten ihres elektrischen Moments. Die Componenten l, m, n der Polarisation finden wir durch Bildung der Mittelwerthe dieser Gröfsen für ein Volumelement. Nehmen wir an, es wären alle Molekeln gleich polarisirt, und $\mathfrak{N}$ sei ihre Anzahl pro Volumeinheit, so ist

$$\begin{aligned} l &= \mathfrak{N}\mathfrak{e}(x_+ - x_-) \\ m &= \mathfrak{N}\mathfrak{e}(y_+ - y_-) \\ n &= \mathfrak{N}\mathfrak{e}(z_+ - z_-). \end{aligned}$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist noch nachträglich über alle Gruppen gleich polarisirter Molekeln zu summiren, wodurch die

Ueberlegung nicht wesentlich geändert wird. Nun sollen sich alle positiven Ladungen um die Strecke dx_+ in der Zeit dt verschieben. Durch eine zur x-Axe senkrechte Fläche $dy\,dz$ treten dann alle die Punktladungen in der positiven x-Richtung hindurch, welche vorher in einem über $dy\,dz$ als Grundfläche errichteten Parallelepiped von der Höhe dx_+ lagen, d. h. das positive Elektricitätsquantum

$$\mathfrak{N} e\, dy\, dz \cdot \frac{d x_+}{d t} d t;$$

denn $\mathfrak{N}$ ist auch die Zahl der positiven Punktladungen pro Volumeinheit. Verschieben sich die negativen Ladungen in der gleichen Zeit um dx_-, so tritt in derselben Richtung das negative Elektricitätsquantum

$$\mathfrak{N} e\, dy\, dz \frac{d x_-}{d t} d t$$

durch $dy\,dz$ hindurch. Nach der Definition der Stromdichte (§ 57) haben diese Verschiebungen also denselben Elektricitätstransport zur Folge wie ein Leitungsstrom, bei dem die Componenten der Dichte die Beträge

$$\frac{1}{dy\,dz} \cdot \mathfrak{N} e \left(\frac{d x_+}{d t} - \frac{d x_-}{d t}\right) dy\, dz = \mathfrak{N} e \left(\frac{d x_+}{d t} - \frac{d x_-}{d t}\right) = \frac{\partial l}{\partial t}$$

$$\mathfrak{N} e \left(\frac{d y_+}{d t} - \frac{d y_-}{d t}\right) = \frac{\partial m}{\partial t}$$

$$\mathfrak{N} e \left(\frac{d z_+}{d t} - \frac{d z_-}{d t}\right) = \frac{\partial n}{\partial t}$$

haben. Fügen wir diese Componenten des sogenannten Verschiebungsstromes in (239) zu den Componenten u, v, w des Leitungsstromes hinzu, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{4\pi}{A}\left(u + \frac{\partial l}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{4\pi}{A}\left(v + \frac{\partial m}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{4\pi}{A}\left(w + \frac{\partial n}{\partial t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{250}$$

In Folge dieses Zusatzes sind die Gleichungen (249) und (250) einander sehr ähnlich geworden. Dafs dem Auftreten des Leitungsstroms in (249) nichts entspricht, ist leicht verständlich, aber der

elektrische Verschiebungsstrom $\frac{\partial l}{\partial t}$ etc. findet sein vollkommenes Analogon in den Gliedern $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ etc. der ersteren Gleichungen. Dagegen fehlt in (250) der Differentialquotient der Feldstärke nach der Zeit, welche in (249) auftritt.

Ziehen wir jetzt aus den Gleichungen (249) und (250) die Folgerungen, welche sich für das Innere homogener Dielektrica ergeben. In ihnen ist nach (203) und (203 a)

$$\begin{array}{lll} l = k X & m = k Y & n = k Z \\ \lambda = \varkappa L & \mu = \varkappa M & \nu = \varkappa N, \end{array}$$

also gehen die genannten Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) &= \frac{4\pi}{A}\frac{\partial l}{\partial t} \\ \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) &= \frac{4\pi}{A}\frac{\partial m}{\partial t} \\ \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) &= \frac{4\pi}{A}\frac{\partial n}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (251)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{\varkappa A}\frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \frac{1}{k}\left(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\right) &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{\varkappa A}\frac{\partial \mu}{\partial t} \\ \frac{1}{k}\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\right) &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{\varkappa A}\frac{\partial \nu}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (252)$$

Aus ihnen folgt zunächst

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+4\pi k}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (252\,\text{a})$$

Die links stehenden Terme sind die zeitlichen Veränderungen der Dichte der wahren Elektricität und des scheinbaren Magnetismus; die letztere ist von allen homogenen Körpern allein in den permanenten Magneten von Null verschieden, dort aber zeitlich unveränder-

lich, die erstere im Dielektricum ebenfalls zeitlich constant — in Uebereinstimmung mit diesen Formeln. Da uns ein von elektrischen und magnetischen Ladungen herrührendes statisches Feld, dessen Gesetze wir schon kennen, nicht mehr interessirt, so setzen wir im Folgenden stets

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{253}$$

Im Allgemeinen würde sich dies Feld, da die Gleichungen (251) und (252) linear sind, zu den jetzt zu betrachtenden Vorgängen superponiren.

Man kann aus (251) und (252) die Magnetisirung eliminiren, indem man die dritte der Gleichungen (252) nach y, die zweite nach z differenzirt und subtrahirt, so dafs man unter Berücksichtigung von (253)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = \frac{A\varkappa}{(1 + 4\pi\varkappa)k}\,\Delta l$$

erhält. Differenzirt man die erste der Gleichungen (251) nach t, so findet man aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = \frac{4\pi\varkappa}{A}\,\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\,.$$

Also gelten für die Componenten der Polarisation die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &= \frac{4\pi k(1 + 4\pi\varkappa)}{A^2}\,\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} \\ \Delta m &= \frac{4\pi k(1 + 4\pi\varkappa)}{A^2}\,\frac{\partial^2 m}{\partial t^2} \\ \Delta n &= \frac{4\pi k(1 + 4\pi\varkappa)}{A^2}\,\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Vertauscht man in dieser Ableitung die Rollen der Gleichungen (251) und (252), so findet man einmal

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) = -\frac{A}{4\pi\varkappa}\,\Delta\lambda,$$

das andere Mal

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) = -\frac{(1 + 4\pi\varkappa)k}{\varkappa A}\,\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\,;$$

also gelten für die Magnetisirung die entsprechenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\\ \Delta\mu &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\\ \Delta\nu &= \frac{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}{A^2}\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (254\text{a})$$

Diese Gleichungen haben die Form der sogenannten Wellengleichung

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

welche in allen Schwingungsproblemen eine fundamentale Rolle spielt. Diejenige particuläre Lösung, welche ebenen, in der positiven x-Richtung fortschreitenden Wellen entspricht, lautet:

$$\begin{aligned} l &= F_1(x-at) \qquad & \lambda &= G_1(x-at)\\ m &= F_2(x-at) & \mu &= G_2(x-at)\\ n &= F_3(x-at) & \nu &= G_3(x-at),\end{aligned}$$

wo die willkürlichen Functionen F_1, F_2, F_3 und G_1, G_2, G_3 wegen (251), (252) und (253) freilich nicht von einander unabhängig sind. Wir gehen später näher auf die analoge Frage bei der Maxwell'schen Theorie (§ 72) ein. Hier genügt es, an dieser Lösung zu constatiren, dafs sich nach unserer Theorie elektrische und magnetische Wirkungen durch Dielektrica mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{A}{\sqrt{4\pi k(1+4\pi\varkappa)}} \qquad (254\text{b})$$

ausbreiten.

Im Vacuum, wo k und $\varkappa$ Null sind, und nach unserer bisherigen Anschauung weder Magnetisirung noch Polarisation existirt, gehen die Gleichungen (249) und (250) statt in (251) und (252) über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial L}{\partial t}\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial M}{\partial t}\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial N}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (251\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{252a}$$

Differenzirt man hier die dritte der Gleichungen (251 a) nach y, die zweite nach z und subtrahirt, so findet man noch ähnlich wie oben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=+A\Delta X,$$

aus (252a) folgt aber im Gegensatz zum Obigen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=0,$$

so dafs

$$\Delta X=0,\quad \Delta Y=0,\quad \Delta Z=0$$

wird. Ebenso überzeugt man sich leicht, dafs auch

$$\Delta L=0,\quad \Delta M=0,\quad \Delta N=0$$

ist. Die Divergenz der Feldstärken ist entsprechend der Gleichung (253) dabei Null gesetzt. Diese Gleichungen lassen sich nun als Wellengleichungen

$$\Delta\varphi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

mit unendlich grofser Fortpflanzungsgeschwindigkeit a auffassen. Unsere Theorie ergiebt also neben endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit in ponderablen Dielektriken Fernwirkung im Vacuum, entsprechend der schon in § 56 am Schlufs erwähnten Auffassung.

§ 71. Uebergang zur Maxwell'schen Theorie.

Ist nun in den Gleichungen (250) die Schwierigkeit betreffs der ungeschlossenen Ströme wirklich gehoben? Man kann diese Frage auch ohne Rechnung verneinen. In Vacuum ist ja der Zusatz $\frac{\partial l}{\partial t}$ etc. Null, er nützt bei Fehlen ponderabler Dielektrica überhaupt nichts. In der That ist nach der Definition der Stromdichte das für eine geschlossene Fläche gebildete Integral

$$\overline{\iint q_{n_i} ds} = -\iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz - \iint (q_{n_1} + q_{n_2})\,ds$$

das zweite Flächenintegral gilt für Unstetigkeitsflächen im eingeschlossenen Raum) gleich der Zunahme der wahren Ladung in ihrem Innern, d. h.

$$\overline{\iint q_{n_i} ds} = \iiint \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,dx\,dy\,dz + \iint ds\,\frac{\partial e}{\partial t}\,.$$

Da dies für jede Fläche gilt, mufs

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= -(q_{n_1} + q_{n_2}) \end{aligned}\right\} \quad (255)$$

sein. Nach (201 a) ist aber

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(X + 4\pi l) + \frac{\partial}{\partial y}(Y + 4\pi m) + \frac{\partial}{\partial z}(Z + 4\pi n)\right] \\ e &= \frac{1}{4\pi}\left[(\mathfrak{E}_{n_1} + 4\pi s_{n_1}) + (\mathfrak{E}_{n_2} + 4\pi s_{n_2})\right], \end{aligned}\right\} \quad (201\text{a})$$

so dafs stets die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi l)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi m)\right) \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(w + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi n)\right) = 0 \\ \left[q_{n_1} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}_{n_1} + 4\pi s_{n_1})\right] + \left[q_{n_2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E}_{n_2} + 4\pi s_{n_2})\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (255\text{a})$$

gelten. Dagegen folgt aus (250)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{\partial l}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v + \frac{\partial m}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w + \frac{\partial n}{\partial t}\right) = 0 \\ &\text{und (vergleiche den Anfang von § 70)} \\ &(q_{n_1} + s_{n_1}) + (q_{n_2} + s_{n_2}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (255\text{b})$$

Die Gleichungen (250) können also auch noch nicht streng richtig sein. Wohl aber fällt diese Unstimmigkeit fort, wenn man in ihnen zu den Ausdrücken $u + \frac{\partial l}{\partial t}$ etc. noch $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$ etc. hinzuaddirt.

Dies thut die MAXWELL'sche Theorie, welche für den Wirbel der magnetischen Kraft die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left(4\pi u + \frac{\partial(X + 4\pi l)}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left(4\pi v + \frac{\partial(Y + 4\pi m)}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left(4\pi w + \frac{\partial(Z + 4\pi n)}{\partial t}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{256}$$

ansetzt. Die Analogie zu (249) ist jetzt, vom Leitungsstrom und dem Vorzeichen abgesehen, vollkommen. Bezeichnet man den aus Leitungs- und Verschiebungsstrom resultirenden Vector als elektrischen Gesammtstrom, so gilt nach (256) der Satz: Der elektrische Strom ist stets geschlossen; und zwar ist dies gemäfs (255) nur eine neue Formulirung des Satzes von der Unzerstörbarkeit der elektrischen Quanten. Damit ist die Frage nach der Elektrodynamik ungeschlossener Ströme beantwortet.

Die physikalische Bedeutung dieses Zusatzes ist leicht zu erkennen. Die bisher von uns benutzte, auf POISSON zurückführende Vorstellung legte Polarisation nur der Materie bei, sie macht zwischen Vacuum und Materie den Unterschied, dafs man es im ersteren nur mit der Feldstärke, in dem von der Materie eingenommenen Volumen aber aufserdem noch mit der Polarisation zu thun hat. Die erstere gehört auch hier dem alle Materie durchdringenden Aether an; die letztere hat dagegen ihren Sitz allein in den Molekeln der Materie. Nach der FARADAY-MAXWELL'schen Auffassung ist hingegen der Aether gerade so polarisirbar, wie die Materie; und zwar beträgt seine Polarisation das $\frac{1}{4\pi}$-fache der Feldstärke. Die ganze Polarisation erhält man erst durch Addition der Antheile des Aethers und der Materie, d. h. diese ist gleich dem Vector, dessen Componenten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}X + l &= \frac{1}{4\pi}(X + 4\pi l)\\
\frac{1}{4\pi}Y + m &= \frac{1}{4\pi}(Y + 4\pi m)\\
\frac{1}{4\pi}Z + n &= \frac{1}{4\pi}(Z + 4\pi n)
\end{aligned}$$

sind. Als Componenten des Verschiebungsstroms mufs man dann aber consequenter Weise die Gröfsen:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi l), \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi m), \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi n)$$

bezeichnen; so entstehen die Gleichungen (256).

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daſs FARADAY die Erklärung des Diamagnetismus in der Annahme der Magnetisirbarkeit des Aethers suchte. Die gesammte Magnetisirung des Aethers und der Materie ist ganz analog durch die Componenten $\frac{1}{4\pi}(L + 4\pi\lambda)$, $\frac{1}{4\pi}(M + 4\pi\mu)$, $\frac{1}{4\pi}(N + 4\pi\nu)$ gegeben, und die in (249) auftretenden Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial t}(L + 4\pi\lambda)$ etc. lassen sich als die Componenten des magnetischen Verschiebungsstroms bezeichnen.

Das Verhältniſs der Polarisation in der alten zu der in der neuen Auffassung ist

$$\frac{l}{\frac{1}{4\pi}X + l} = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}.$$

Es wird 1 wenn man k über alle Gröſsen wachsen läſst. Auf diesem Wege muſs sich also die in § 70 vorgetragene Theorie in die MAXWELL'sche überführen lassen. Um dies näher auszuführen, multipliciren wir alle Werthe von k mit einer Zahl $\mathfrak{N}^2$, alle Werthe der Stromdichte q und ihrer Componenten u, v, w, sowie der Polarisation s und ihrer Componenten l, m, n und schlieſslich die Constante A mit $\mathfrak{N}$. Die Gleichungen (249), welche sich, wenn k von Null verschieden ist, auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{k}\right) = -\frac{1}{A}\frac{\partial(L + 4\pi\lambda)}{\partial t} \text{ etc.}$$

bringen lassen, bleiben davon ebenso unberührt, wie die Gleichungen (250)

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{4\pi}{A}\left(u + \frac{\partial l}{\partial t}\right) \text{ etc.}$$

Lassen wir nun $\mathfrak{N}$ über alle Grenzen wachsen, so verschwinden die Gröſsen $X = \frac{1}{k}$ etc. wie $\frac{1}{\mathfrak{N}}$, und mit ihnen der Unterschied zwischen den Gleichungen (256) und (250), sowie der zwischen (255 a) und (255 b). Durch die beiden Gleichungentripel (243) und (258) nebst den nöthigen Nebenbedingungen ist aber der Vorgang, wie wir in § 76 zeigen werden, eindeutig bestimmt. Im Grenzfall $\mathfrak{N} = \infty$

geben also beide Theorien für die Werthe der Polarisation, Magnetisirung etc. dieselben Resultate.

Gegenstand der Beobachtung sind aber niemals diese Gröfsen selbst, sondern die von ihnen herrührenden ponderomotorischen Kräfte und die Energiequanten, welche der elektrische Strom in einander umsetzt. Die Formeln für die ponderomotorischen Wirkungen des statischen magnetischen Feldes werden nun durch die Multiplication mit $\mathfrak{N}$ nicht berührt. Aus dem Ausdruck (210b) für die Dichte der elektrischen Energie

$$\frac{1 + 4\pi k}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi k^2}(l^2 + m^2 + n^2)$$

hebt sich nun aber $\mathfrak{N}$ im Grenzfall $\mathfrak{N} = \infty$ wieder heraus; dasselbe mufs deswegen auch für die ponderomotorischen Wirkungen des elektrischen Feldes gelten, was man am einfachsten an den Gleichungen (217) und (217a)

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ etc.}$$

$$X_x = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi}(X^2 - Y^2 - Z^2) + \frac{1}{2}\Theta(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

$$Y_z = Z_y = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi} Y Z$$

bestätigt; denn Θ transformirt sich wie k. Und die Gleichungen (240) für die Kraft, die ein Element des Stromleiters im Magnetfeld erfährt

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{A}(Nv - Mw)\,dx\,dy\,dz \quad \text{etc.}$$

werden von der Multiplication mit $\mathfrak{N}$ ebenso wenig betroffen, wie Gleichung (229b) für die vom Strom producirte Energie

$$J = \iiint (Xu + Yv + Zw)\,dx\,dy\,dz - \iint ds\, E_{12}\, q_n,$$

da sich E_{12} wie X transformirt. Die Uebereinstimmung zwischen der bisherigen Theorie und der ihr zu Grunde liegenden Erfahrung wird also durch den Grenzübergang nicht gestört.

Führt man ihn an den Gleichungen (217c) durch, so verschwindet die durch Spannungen nicht vermittelte Fernwirkung, welche sich in den Gliedern

$$-\,s'\frac{\partial \varphi}{\partial x} = s' X = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X$$

etc.

ausdrückt wie $\frac{1}{\mathfrak{N}^2}$. Dafür gehen die Spannungscomponenten X_x' etc. in die MAXWELL'schen Werthe (217 a) über.

§ 72. Ebene elektromagnetische Wellen in Dielektriken.

Wir legen von jetzt an die MAXWELL'sche Theorie der Betrachtung zu Grunde, d. h. wir gehen von den Gleichungen (249) und (256) aus:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(L + 4\pi\lambda) \\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(M + 4\pi\mu) \\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}(N + 4\pi\nu)
\end{aligned}\right\} \tag{257}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left(4\pi u + \frac{\partial}{\partial t}(X + 4\pi l)\right) \\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left(4\pi v + \frac{\partial}{\partial t}(Y + 4\pi m)\right) \\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left(4\pi w + \frac{\partial}{\partial t}(Z + 4\pi n)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{258}$$

Für homogene leitende Körper gehen sie nach (203), (203 a) und (213) über in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial L}{\partial t} \\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial M}{\partial t} \\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial N}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{259}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau X + (1 + 4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}\right\} \\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau Y + (1 + 4\pi k)\frac{\partial Y}{\partial t}\right\} \\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau Z + (1 + 4\pi k)\frac{\partial Z}{\partial t}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{260}$$

Die letzteren sind insofern specieller als (258), als bei Verwendung von (219) das Fehlen localer elektromotorischer Kräfte angenommen ist. Für nichtleitende Substanzen ($\tau = 0$) folgt aus ihnen zunächst analog zu (252a)

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0\,,$$

was wiederum die Unveränderlichkeit der wahren elektrischen und der scheinbaren magnetischen Ladungen ausspricht. Wir setzen, um statische Felder von der Betrachtung auszuschliefsen, die Divergenzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{261}$$

und wollen diese Gleichungen unter Vorbehalt späterer Rechtfertigung (siehe § 74) auch auf leitende Körper übertragen.

Dann wenden wir hier dasselbe Verfahren an, durch welches wir in § 70 zu den Wellengleichungen gelangten; d. h. wir differenziren die dritte der Gleichungen (259) nach y, die zweite nach z und subtrahiren; differenziren wir ferner die erste der Gleichungen (260) nach t, so erhalten wir

$$\frac{A}{1 + 4\pi\varkappa}\Delta X = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) = \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau\frac{\partial X}{\partial t} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right\}.$$

Vertauscht man bei diesem Verfahren die Rollen der Gleichungen (259) und (260) mit einander, so findet man entsprechend

$$\begin{aligned} A\Delta L &= -4\pi\tau\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - (1 + 4\pi k)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1 + 4\pi\varkappa}{A}\left\{4\pi\tau\frac{\partial L}{\partial t} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right\}, \end{aligned}$$

so dafs für die je drei Componenten der beiden Feldstärken Differentialgleichungen von der Form

$$\Delta\varphi = \frac{1 + 4\pi\varkappa}{A^2}\left\{4\pi\tau\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (1 + 4\pi k)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} \tag{262}$$

gelten.

Zunächst wollen wir nun die Vorgänge in einem nichtleitenden Medium in's Auge fassen. Gleichung (261) geht für $\tau = 0$ über in die Wellengleichung

$$\Delta \varphi = \frac{(1 + 4\pi k)(1 + 4\pi \varkappa)}{A^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{262a}$$

welcher durch den Ansatz

$$\left.\begin{array}{ll} X = F_1(x - a t) & L = G_1(x - a t) \\ Y = F_2(x - a t) & M = G_2(x - a t) \\ Z = F_3(x - a t) & N = G_3(x - a t) \end{array}\right\} \tag{263}$$

genügt wird. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ebener Wellen ist dabei nach (262a)

$$a = \frac{A}{\sqrt{(1 + 4\pi k)(1 + 4\pi \varkappa)}} \,. \tag{264}$$

Die sechs Functionen F und G müssen nun aber noch gewisse Relationen erfüllen, damit auch den Gleichungen (259), (260) und den Relationen (261) genügt wird. Die beiden letzteren gehen nämlich für (263) über in

$$F_1' = 0$$

$$G_1' = 0,$$

wo F_1' und G_1' die Derivirten der Function F und G nach ihrem Argument sein sollen. X und L müssen also räumlich und zeitlich constant, und da wir statische Felder ausschliefsen wollen, Null sein. Die Componenten beider Feldstärken in der Fortpflanzungsrichtung sind Null; ebene elektromagnetische Wellen sind daher transversal.

Die Gleichungen (259) vereinfachen sich unter diesen Umständen zu den folgenden Beziehungen zwischen F_2, F_3, G_2 und G_3:

$$-\frac{\partial Z}{\partial x} = -F_3' = -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{a}{A}(1 + 4\pi\varkappa) G_2' = \sqrt{\frac{1 + 4\pi\varkappa}{1 + 4\pi k}}\, G_2'$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = F_2' = -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{A} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{a}{A}(1 + 4\pi\varkappa) G_3' = \sqrt{\frac{1 + 4\pi\varkappa}{1 + 4\pi k}}\, G_3'.$$

Die Gleichungen (260) liefern nichts Neues, weil sie aus (259) und den Wellengleichungen für die sechs Kraftcomponenten hervorgehen. Da nun aber keine dieser vier Functionen einen zeitlich und räum-

lich constanten Summanden enthalten darf — sonst kämen wir ja wieder auf statische Felder —, so mufs

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= -\sqrt{\frac{1+4\pi\varkappa}{1+4\pi k}}\, G_2 \\ F_2 &= \sqrt{\frac{1+4\pi\varkappa}{1+4\pi k}}\, G_3 \end{aligned}\right\} \tag{265}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{\sqrt{1+4\pi\varkappa}} &= \frac{N}{\sqrt{1+4\pi k}} \\ \frac{Z}{\sqrt{1+4\pi\varkappa}} &= -\frac{M}{\sqrt{1+4\pi k}} \end{aligned}\right\} \tag{265a}$$

sein. Hieraus folgt

$$YM + ZN = 0;$$

die elektrische und die magnetische Kraft stehen auf einander senkrecht. Nun enthält der Ansatz (263) immer noch zwei willkürliche Functionen, F_2 und F_3; er stellt also zwei unabhängige, einander überlagernde und, wenn wir einen bekannten Begriff aus der Optik übertragen, senkrecht zu einander polarisirte Wellen dar. Um die eine davon zu isoliren, setzen wir $F_3 = 0$. Dann verschwinden Z und M und man erkennt, dafs in einer elektrischen Welle Fortpflanzungsrichtung, elektrische und magnetische Kraft wie die x-, die y- und die z-Axe zu einander liegen (siehe Figur 30).

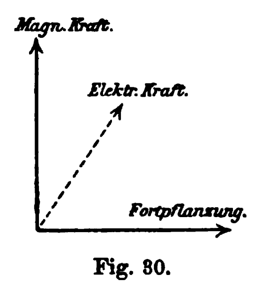


Fig. 30.

Nach (264) ist im Vacuum die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen a gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum. Dies legt den Gedanken, dafs Lichtwellen nichts Anderes als elektrische Wellen von sehr kleiner Wellenlänge (10^{-5} cm) sind, äufserst nahe. Soll er zutreffen, so mufs für nichtmagnetisirbare Substanzen der Brechungsindex

$$\frac{A}{a} = \sqrt{1+4\pi k}$$

sein. Diese von Maxwell zuerst entdeckte Beziehung zur Dielektricitätsconstanten bewährt sich zwar bei einigen Substanzen auffallend gut, bei anderen freilich garnicht, doch kann die Theorie (siehe Band V dieser Vorlesungen) auch über die Abweichungen Rechenschaft geben. Die auf Grund der elastischen Lichttheorie

nie entschiedene Streitfrage, ob das Licht in der Polarisationsebene oder senkrecht zu ihr schwingt, ist dann dahin zu beantworten, dafs die eine der beiden Feldstärken in ihr[1]), die andere senkrecht zu ihr liegt. Beide sind nach (265) mit einander verknüpft. Elektrische Wellen können nicht ohne magnetische bestehen und umgekehrt.

§ 73. Kugelwellen in Dielektriken.

Eine andere einfache Lösung der Wellengleichung (262a) erhalten wir, wenn wir festsetzen, dafs die Function F die Coordinaten nur in der Verbindung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

enthalten soll, und dann

$$\varphi = \frac{F}{r}$$

setzen. Durch Differentiation folgt dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(-\frac{F}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r}\right) x$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{F}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{3F}{r^4} - \frac{3}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right);$$

bildet man anlog die anderen beiden zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten, so folgt durch Addition:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

also geht die Differentialgleichung für φ

$$\Delta \varphi = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

über in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

deren eine Lösung, welche einer vom Punkt $r = 0$ ausgehenden Welle entspricht,

$$F = F(r - a t)$$

lautet. Die andere

$$F = F(r + a t)$$

[1]) Nach neueren Forschungen die magnetische. Der Herausgeber.

ergäbe Wellen, welche nach dem Nullpunkt hin laufen. Nur dieser selbst ist ausgeschlossen, weil wir soeben durch $\frac{1}{r}$ dividirt haben.

Nun können wir aus dieser einen Lösung der Wellengleichung durch beliebig oft wiederholte Differentiation nach den Coordinaten und der Zeit und durch Addition solcher Differentialquotienten neue Lösungen gewinnen. Z. B. überzeugt man sich leicht, dafs nach dem Ansatz

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} & L &= 0 \\ Y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & M &= -\frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \\ Z &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} & N &= \frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{266}$$

der Wellengleichung durch alle sechs Functionen X, Y, Z und L, M, N genügt ist. Zugleich aber sind, wie man durch Einsetzen sieht, auch die Gleichungen (259) und (260) befriedigt. Die Divergenz der elektrischen und magnetischen Kraft ist gleich Null, wie es sein mufs, wenn aus (259) und (260) die Wellengleichung folgen soll.

Um den Ansatz (266) zu discutiren, setzen wir in ihm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{x}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{x^2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right); \end{aligned}$$

denn wie die Function F ist auch φ nur von r und t abhängig.

Dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{y^2 + z^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ Y &= -\frac{xy}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ Z &= -\frac{xz}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \\ L &= 0 \\ M &= -\frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \\ N &= \frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{y}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{266a}$$

Hieraus folgt

$$Lx + My + Nz = 0$$

d. h. die magnetische Kraft steht auf dem Radiusvector r senkrecht. Da $L = 0$, steht sie auch auf der x-Richtung senkrecht, d. h. ihre Richtung ist durch die Breitenkreise einer Kugel um den Punkt $r = 0$ gegeben, wenn man die Durchstofspunkte der x-Axe als die Pole ansieht. Ferner folgt

$$XL + YM + ZN = 0;$$

d. h. elektrische und magnetische Feldstärke sind zu einander senkrecht. Dagegen ist

$$Xx + Yy + Zz = 2\frac{x}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

oder anders geschrieben

$$\left(X - \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)x + Yy + Zz = 0.$$

Man darf also die Transversalität der elektrischen Wellen nicht dahin misverstehen, dafs die elektrische Kraft immer senkrecht zur Richtung nach der Erregungsstelle wäre. Vielmehr superponirt sich zu einer in der Meridianrichtung der genannten Kugel liegenden Feldstärke, deren Componenten $\left(X - \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$, Y, Z sind, die in der x-Richtung liegende, auf der ganzen Kugel gleiche Kraft $\frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

Setzt man in (266a)

$$\varphi = \frac{F}{r},$$

so hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}F + \frac{1}{r}F'$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = \frac{3F}{r^4} - \frac{3F'}{r^3} + \frac{F''}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} = \frac{a}{r^2}F' - \frac{a}{r}F''$$

zu setzen. Behält man dann nur die niedrigsten Potenzen von r bei, so erhält man die folgenden Annäherungsformeln für grofse Entfernungen vom Ausgangspunkt:

$$
\left.\begin{aligned}
X &= \frac{y^2 + z^2}{r^3} F'' & L &= 0 \\
Y &= -\frac{xy}{r^3} F'' & M &= \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}} \frac{z}{r^3} F'' \\
Z &= -\frac{xz}{r^3} F'' & N &= -\sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi \varkappa}} \frac{y}{r^3} F''.
\end{aligned}\right\} \quad (266\,\text{b})
$$

Es gelten mit derselben Annäherung die drei Relationen

$$
\begin{aligned}
Xx + Yy + Zz &= 0 \\
Lx + My + Nz &= 0 \\
XL + YM + ZN &= 0;
\end{aligned}
$$

Fortpflanzungsrichtung, elektrische und magnetische Feldstärke werden im Unendlichen wie bei einer ebenen Welle auf einander senkrecht.

§ 74. Ebene Wellen in leitenden Körpern.

Um die Vorgänge in leitenden Körpern zu untersuchen, gehen wir zunächst auf die Gleichungen (259) und (260)

$$
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{1 + 4\pi k}{A} \frac{\partial L}{\partial t}
$$

etc.

$$
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{1}{A}\left\{4\pi\tau X + (1 + 4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}\right\}
$$

zurück. Eine Lösung von ihnen erhält man, wenn man die magnetische Feldstärke für alle Zeit gleich Null setzt. Dann ist auch der Wirbel der elektrischen Kraft Null, diese also aus einer Potentialfunction ableitbar. Trotzdem ist das elektrische Feld kein statisches; vielmehr genügt die Componente X der Differentialgleichung

$$
4\pi\tau X + (1 + 4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t} = 0,
$$

deren allgemeine Lösung

$$
X = X_0 e^{-\frac{4\pi\tau}{1 + 4\pi k} t}
$$

ist. Ebenso ist

$$
Y = Y_0 e^{-\frac{4\pi\tau}{1 + 4\pi k} t}
$$

$$
Z = Z_0 e^{-\frac{4\pi\tau}{1 + 4\pi k} t}.
$$

Der Vector X_0, Y_0, Z_0 ist dabei nur der Bedingung unterworfen, dafs er wirbelfrei ist. Ein nach den Gesetzen der Elektrostatik über den Leiter vertheiltes Feld klingt also, wenn es einmal bestanden hat, nach dem Exponentialgesetz ab; und zwar ist die Zeit, in der die Kraft auf den e-ten Theil herabgeht gleich

$$\frac{1 + 4\pi k}{4\pi\tau}$$

und wegen der Gröfse von τ bei gutleitenden Stoffen unmefsbar klein. Das Gleiche gilt von der elektrischen Ladung, da sie der Divergenz der elektrischen Kraft proportional ist. Auch sie verschwindet praktisch momentan; der Leitungsstrom aber, welcher den Ladungsausgleich bewirkt, wird — dies ist der Sinn der besprochenen Lösung — in seinen magnetischen Wirkungen vollkommen durch den Verschiebungsstrom compensirt. Hieraus folgt unsere Berechtigung, bei der Untersuchung elektrischer Wellen gemäfs (261) auch bei leitenden Substanzen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

zu setzen. Im Allgemeinen superponirt sich noch solch' ein wirbelfreies, abklingendes Feld über den Schwingungsvorgang.

Unter dieser Voraussetzung haben wir schon in § 72 aus (259) und (260) die Differentialgleichung (262) abgeleitet, welcher die Componenten beider Feldstärken gehorchen. Setzt man zur Abkürzung

$$a = \frac{A}{\sqrt{(1 + 4\pi k)(1 + 4\pi\varkappa)}}$$

$$b = \frac{4\pi\tau(1 + 4\pi k)}{A^2},$$

so lautet sie

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + b\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{267}$$

Da sie linear und homogen ist und constante Coefficienten besitzt, ist

$$\varphi = \alpha e^{ipt + sx} \tag{268}$$

eine Lösung, wenn die Constanten p und s der Gleichung

$$s^2 = -\frac{p^2}{a^2} + ibp \tag{268a}$$

genügen. Der reelle und der imaginäre Theil von (268) giebt jeder für sich eine in der x-Richtung fortschreitende ebene Welle. Dabei sind p und s im Allgemeinen complex. Zeitlich rein periodischen Schwingungen entspricht ein reeller Werth von p; die Schwingungsdauer beträgt dann $\frac{2\pi}{p}$.

Um den letzteren Fall näher zu untersuchen, setzen wir

$$s = q + ir,$$

wo q und r beide reell sein sollen, und finden durch Trennung der reellen und imaginären Glieder in (268a) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r^2 - q^2 &= \frac{p^2}{a^2} \\ 2qr &= bp \end{aligned}\right\} \tag{268b}$$

zur Bestimmung von r und q. Aus ihnen folgt (die Vorzeichenfrage entscheidet sich dadurch, dafs q^2 und r^2 positiv sein müssen)

$$q^2 = \frac{p^2}{2a^2}\left(\sqrt{\frac{b^2a^4}{p^2}+1}-1\right)$$

$$r^2 = \frac{p^2}{2a^2}\left(\sqrt{\frac{b^2a^4}{p^2}+1}+1\right).$$

Nach (268) ist aber

$$\varphi = \alpha e^{qx} e^{i(pt+rx)}. \tag{268c}$$

Sollen die Wellen in der positiven X-Richtung fortschreiten, so mufs also ($p > 0$ vorausgesetzt) $r < 0$ sein. Aus der zweiten der Gleichungen (268b) geht dann auch $q < 0$ hervor, so dafs

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{p}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b^2a^4}{p^2}+1}-1\right)} \\ r &= -\frac{p}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b^2a^4}{p^2}+1}+1\right)} \end{aligned}\right\} \tag{268d}$$

zu setzen ist.

Nach (268c) ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\left|\frac{p}{r}\right| = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b^2a^4}{p^2}+1}+1\right)}},$$

d. h. um so größer, je kleiner die Periode $\frac{2\pi}{p}$ ist. Für sehr schnelle Schwingungen, für welche $\frac{b^2 a^4}{p^2}$ neben 1 fortgelassen werden kann, nimmt sie den für einen Nichtleiter von gleicher Dielektricitätsconstante $1 + 4\pi k$ und Permeabilität $1 + 4\pi \varkappa$ geltenden Werth a an. Im Gegensatz zu den Wellen in Nichtleitern ist aber die durch (268c) angegebene Welle gedämpft; ihre Amplitude nimmt, da $q < 0$, in der Fortschreitungsrichtung ab. Und zwar, da

$$\frac{d(q^2)}{dp} = \frac{p}{2a^2} \frac{\left(\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1}} > 0$$

um so stärker, je kleiner die Periode $\frac{2\pi}{p}$ ist. Dennoch bleibt q auch dann endlich, wenn p über alle Grenzen wächst; denn da

$$\sqrt{\frac{b^2 a^4}{p^2} + 1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{b^2 a^4}{p^2} + \ldots,$$

so ist

$$\lim_{p=\infty} q = -\frac{ab}{2}.$$

Mit unendlich wachsender Leitfähigkeit τ wachsen auch b und q in's Unendliche. In dem durch $\tau = \infty$ charakterisirten „vollkommenen" Leiter können sich Wellen also überhaupt nicht fortpflanzen. Das folgt auch unmittelbar aus der Differentialgleichung (267); ist $b = \infty$, so mufs $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ sein, da $\Delta \varphi$ stets endlich bleibt.

Für sehr langsame, durch kleine Werthe von p ausgezeichnete Schwingungen kann man in (268a) $\frac{p^2}{a^2}$ neben bp vernachlässigen, oder was dasselbe sagt, in der Differentialgleichung (267) das Glied $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Diese geht dann in die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta \varphi = b \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

über.

§ 75. Grenzbedingungen. Die Reflexion elektrischer Wellen am vollkommenen Leiter.

Während wir bisher nur das Innere homogener Körper der Betrachtung zu Grunde legten, wollen wir jetzt die allgemein gültigen Gleichungen (249) und (256) zur Ableitung der Grenzbedingungen an einer Unstetigkeitsfläche benutzen. Die Normale des zu betrachtenden Flächenelements weise in die x-Richtung; wir bilden den Circulationswerth der magnetischen Kraft für den Umfang eines unendlich kleinen, sehr lang gestreckten, von der Unstetigkeitsfläche halbirten Rechtecks $d\xi\, d\eta$. Nach (256) ist er, da die auf $d\xi$ bezüglichen Theile zu vernachlässigen sind:

$$(M_1 - M_2)\, d\eta = \frac{1}{A}\left(4\,\pi\, w + \frac{\partial(Z + 4\,\pi\, n)}{\partial t}\right) d\xi\, d\eta\,. \qquad (269)$$

Läfst man hier $d\xi$ kleiner und kleiner werden, so findet man als Grenzbedingung

Da man genau so

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_2\,. \\ N_1 &= N_2 \end{aligned}\right\} \qquad (270)$$

ableiten kann und wegen der Symmetrie zwischen (249) und (256) für die elektrische Kraft dasselbe gelten mufs, wie für die magnetische, so ist auch

$$Y_1 = Y_2\,, \qquad Z_1 = Z_2\,. \qquad (270\text{a})$$

Die tangentiellen Componenten beider Feldstärken sind stetig. Drückt man dies im Anschlufs an § 66 dahin aus, dafs ihr Flächenwirbel verschwindet, so tritt besonders deutlich hervor, dafs diese Grenzbedingung nur ein Grenzfall der Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie sind. Es sind dies dieselben Bedingungen, die wir schon früher, freilich für einen engeren Gültigkeitsbereich, kennen gelernt haben.

Nur eine Ausnahme giebt es. Die Stromdichte q mufs stets endlich sein, wo es die Leitfähigkeit τ ist. Sonst würden nach (229d) unendlich grofse Energiequanten als Joule'sche Wärme auftreten. Beim vollkommenen Leiter dagegen kann q auch unendlich sein. Dem entsprechend kann sich das Glied $w\, d\xi$ in (265) mit abnehmendem $d\xi$ nicht dem Werth 0, sondern einem von Null verschiedenen Grenzwert w' nähern. An die Stelle von (270) treten dann die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} M_1 - M_2 &= \frac{4\pi}{A} w' \\ N_1 - N_2 &= \frac{4\pi}{A} v', \end{aligned}\right\} \qquad (270\,\text{b})$$

wenn v' analog der Grenzwerth von $v\,d\xi$ ist. Nun können aber nach den vorigen Paragraphen Schwingungen im vollkommenen Leiter nicht fortpflanzen, es ist also $M_2 = N_2 = 0$ zu setzen, wenn der Leiter auf der durch den Index 2 gekennzeichneten Seite der Grenzfläche liegt. Also sind

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{4\pi}{A} w' \\ N_1 &= \frac{4\pi}{A} v'. \end{aligned}\right\} \qquad (270\,\text{c})$$

Wie man an den Gleichungen

$$\lim_{d\xi = 0} (w\,d\xi\,d\eta) = w'\,d\eta$$
$$\lim_{d\xi = 0} (v\,d\xi\,d\zeta) = v'\,d\zeta$$

erkennt, sind $w'd\eta$ und $v'd\zeta$ die Intensitäten der durch die Rechtecke $d\xi\,d\eta$ und $d\xi\,d\zeta$ hindurchtretenden Ströme. Es entspricht genau der in § 66 gegebenen Definition des Flächenwirbels, wenn wir den durch $u' = 0$, w' und v' als Componenten definirten Vector als die Dichte des elektrischen Flächenstroms bezeichnet. Die Gleichungen (270 b) lassen sich dann mit den Worten ansprechen: Der Flächenwirbel der magnetischen Feldstärke ist gleich dem 4π-fachen der elektromagnetisch gemessenen Dichte des Flächenstroms. Der letztere schützt das Innere des vollkommenen Leiters vor dem Eindringen der Wellen.

Die Grenzbedingungen (270 a) für die elektrische Kraft gehen am vollkommenen Leiter über in

$$Y_1 = 0, \; Z_1 = 0. \qquad (270\,\text{d})$$

Dies wollen wir benutzen, um die Reflexion ebener Wellen, welche auf die ebene Grenze eines vollkommenen Leiters senkrecht auftreffen, zu erörtern.

Die Grenzebene habe die Gleichung $x = 0$, der Leiter erfülle die Raumhälfte, in welcher x positiv ist, während die andere Hälfte von einem Dielektrikum eingenommen sein soll. Der Ansatz (263) giebt deshalb für die Darstellung einer ebenen auf die Grenzfläche

auftreffenden Welle, wenn man $F_3 = 0$, $F_2 = F$ setzt und (265) beachtet, die Gleichungen

$$X = 0 \quad Y = F(x - a t) \quad Z = 0$$
$$L = 0 \quad At = 0 \qquad N = \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi\varkappa}}\, F(x - a t).$$

Der Grenzbedingung $Y = 0$ für $x = 0$ ist hier, abgesehen von dem trivialen Fall $F = 0$, nicht genügt. Deshalb entsteht an der Grenze eine neue, in der negativen x-Richtung fortschreitende Welle, deren elektrische Feldstärke die der einfallenden in der Grenzebene gerade aufhebt. Die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \quad Y = - F(- x - a t) \quad Z = 0 \\ L = 0 \quad M = 0 \quad N = \sqrt{\dfrac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi\varkappa}}\, F(- x - a t) \end{array}\right\} \tag{271}$$

geben aber eine in der negativen x-Richtung fortschreitende Welle, weil diese zu den Richtungen der beiden Feldstärken die in Fig. 30 angegebene Lage hat. Und für $x = 0$ ist die aus beiden Wellen resultirende elektrische Kraft

$$Y = F(x - a t) - F(- x - a t)$$

unabhängig von t gleich Null, während die resultirende magnetische Kraft

$$N = \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi\varkappa}}\, \big(F(x - a t) + F(- x - a t)\big)$$

dort den Betrag $2\sqrt{\dfrac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi\varkappa}}\, F(- a t)$ hat. Die Gleichungen (271) enthalten demnach die Darstellung der reflektirten Welle. Sie ist an Intensität der einfallenden gleich.

Bei periodischen Schwingungen kann man

$$F(x - a t) = \sin s (x - a t)$$

setzen, die resultirenden Feldstärken erhalten dann die Beträge

$$Y = \sin s (x - a t) + \sin s (x + a t) = 2 \sin (s x) \cos (s a t)$$
$$N = \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi\varkappa}}\, \big(\sin s (x - a t) - \sin s (x + a t)\big)$$
$$= - 2 \sqrt{\frac{1 + 4\pi k}{1 + 4\pi\varkappa}}\, \cos (s x) \sin (s a t).$$

Es bilden sich an der reflektirenden Fläche demnach stehende Wellen, und zwar liegen in ihr sowie in den Abständen $\frac{\pi}{s}, \frac{2\pi}{s}, \frac{3\pi}{s} \dots$ von ihr Knoten der elektrischen und Bäuche der magnetischen Kraft; dagegen in den Abständen $\frac{\pi}{2s}, \frac{3\pi}{2s}, \frac{5\pi}{2s} \dots$ Knoten der magnetischen und Bäuche der elektrischen Kraft.

Heinrich Hertz hat diese stehenden Wellen experimentell nachgewiesen. Er erzeugte elektrische Wellen im Luftraum, indem er in einem mittels des Inductoriums aufgeladenen Leitersystem Entladungsschwingungen (siehe § 77) hervorrief. Zur Auffindung der Lage von Knoten und Bäuchen diente ihm ein kreisförmiger, an einer Stelle durch ein Funkenmikrometer unterbrochener Draht, an dem sich die Inductionswirkung der Wellen durch Ueberspringen von Funken kundgab. So konnte er an der Lebhaftigkeit des Funkenspiels die Lage der Knoten und Bäuche erkennen, den Abstand benachbarter Knotenebenen, d. h. die Wellenlänge $\frac{2\pi}{s}$ bestimmen und nach einer Schätzung der Schwingungsdauer $\mathfrak{T}$ zur Ermittelung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Luft

$$a = \frac{2\pi}{s\mathfrak{T}}$$

gelangen. Daſs er dabei einen der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum sehr nahen Werth fand, spricht sehr für die Maxwell'sche Theorie; denn da k und $\varkappa$ für Luft sehr klein sind, stimmt dies mit Gleichung (264) überein. Die in § 70 vorgetragene, die Fernwirkung im Vacuum beibehaltende Theorie würde dagegen nach (254b) einen sehr viel gröſseren Wert ergeben.

§ 76. Das Energieprincip in der Maxwell'schen Theorie. Eindeutigkeit der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Die Gleichungen (249) wurden in § 69 für ruhende Körper abgeleitet. Deſshalb ist für permanente Magnete $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ etc. zu setzen und die Gleichungen (249) gehen für sie über in

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{1}{A}\frac{\partial L}{\partial t}$$
etc.

Wir können diese Form aber auch aus den Gleichungen (259) erzielen, wenn wir den permanenten Magneten den Wert $\varkappa = 0$ zuschreiben, wie wir es schon im § 54 taten; diese Festsetzung ist auch notwendig, wenn die Formel (211 d) für die magnetische Energie gelten soll. Dann sind die Gleichungen (259) ebenso allgemein wie (249). Wir führen sie zur Erleichterung der nachfolgenden Rechnung hier noch einmal an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial L}{\partial t} \\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial M}{\partial t} \\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{1+4\pi\varkappa}{A}\frac{\partial N}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{259}$$

Der zweite Tripel unserer schlechthin als MAXWELL'sche Gleichungen bezeichneten Grundformeln lautet in der analogen, noch ganz allgemein gültigen Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{1}{A}\left(4\pi u + (1+4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}\right) \\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{A}\left(4\pi v + (1+4\pi k)\frac{\partial Y}{\partial t}\right) \\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{1}{A}\left(4\pi w + (1+4\pi k)\frac{\partial Z}{\partial t}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{272}$$

Diese sechs Gleichungen multipliciren wir nun mit $-L$, $-M$, $-N$, X, Y, Z und addiren sie; dann finden wir

$$\begin{aligned}
\frac{A}{4\pi}\Big\{ & X\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \\
& - L\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - M\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - N\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\Big\} \\
& = (Xu + Yv + Zw) + \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\frac{1+4\pi k}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2) \\
& \qquad + \frac{(1+4\pi\varkappa)}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\Big\}.
\end{aligned}$$

Die linke Seite läfst sich nun leicht auf die Form bringen:

$$-\frac{A}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(YN - ZM) + \frac{\partial}{\partial y}(ZL - XN) + \frac{\partial}{\partial z}(XM - YL).\right\}$$

Integriren wir also über einen abgeschlossenen Theil des Raumes, so liefert die Anwendung des GAUSS'schen Satzes:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi k)(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz\right. \\
&\quad\left.+\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\} \\
&\quad+\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz \\
&\quad=\frac{A}{4\pi}\iint ds\left\{(YN-ZM)\cos(n_i,x)\right. \\
&\qquad\left.+(ZL-XN)\cos(n_i,y)+(XM-YL)\cos(n_i,z).\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (273)$$

Dabei ist Stetigkeit aller Uebergänge vorausgesetzt. Das erste Glied der linken Seite ist nach (210 b) und (211 d) die Zunahme der Summe aus der elektrischen und magnetischen Energie pro Zeiteinheit, das zweite die von elektrischen Strömen pro Zeiteinheit erzeugte Energie, welche bei veränderlichen Strömen im Gegensatz zu stationären nicht für jedes abgeschlossene Stromgebiet Null zu sein braucht, sondern sowohl positive als negative Werte annehmen kann (vgl. § 69). Die rechte Seite giebt also an, wie viel Energie in der Zeiteinheit in das betrachtete Raumgebiet durch die Oberfläche hineinströmt. Es ist wichtig, dafs das Flächenintegral für die unendlich ferne Fläche nicht immer verschwindet. Bei der Kugelwelle z. B. zeigen die Formeln (266 b), dafs die Componenten beider Feldstärken im Unendlichen nur wie $\frac{1}{R}$ abnehmen, die Ausdrücke $(YN - MZ)$ etc. also wie $\frac{1}{R^2}$, so dafs das fragliche Integral für die unendlich ferne Fläche einen von Null verschiedenen Grenzwerth hat. Das hängt damit zusammen, dafs das Erregungscentrum der Kugelwelle Energie ins Unendliche ausstrahlt.

An die Gleichung (273) knüpft sich der schon in § 70 angekündigte Beweis, dafs das elektromagnetische Feld in einem Raumtheil (der auch unendlich grofs sein kann) gemäfs den Gleichungen (259) und (272) eindeutig bestimmt ist, wenn

1. der Anfangszustand X_0, Y_0, Z_0; L_0, M_0, N_0 für $t = 0$,
2. die locale elektromotorische Kraft δ (Componenten: α, β, γ),
3. an der Grenze die tangentialen Componenten der elektrischen oder magnetischen Feldstärke für alle Zeiten $t > 0$ bekannt sind.

Zu diesem Zweck verwandeln wir Gleichung (273) durch Anwendung von (221) in

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi k)(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz\right.\\
&\left.\quad+\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\\
&\quad+\iiint\frac{1}{\tau}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint(\alpha u+\beta v+\gamma w)\,dx\,dy\,dz\\
&\quad+\overline{\iint} ds\left\{(YN-ZM)\cos(n_i,x)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(ZL-XN)\cos(n_i,y)+(XM-YL)\cos(n_i,z).\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(273\text{a})
$$

Wir bemerken zunächst, dafs der Integrand des Flächenintegrals nur von den Tangentialcomponenten der beiden Feldstärken abhängt; denn legt man die x-Axe in die Richtung von n_i, so geht er über in $(YN-ZM)$. Angenommen nun, wir hätten zwei Lösungen X', Y', Z'; L', M', N' und X'', Y'', Z''; L'', M'', N'' der Maxwell'schen Gleichungen, welche beide denselben unter 1., 2. und 3. angegebenen Nebenbedingungen genügen, so gehören ihnen nach (221) gewisse Werthe u', v', w' und u'', v'', w'' der Componenten der Stromdichte zu. Die Differenzen $X=X'-X''$, $Y=Y'-Y''\dots u=u'-u''\dots$ genügen dann ebenfalls den Maxwell'schen Gleichungen, aber den Nebenbedingungen, dafs

1. im Anfangszustand beide Feldstärken Null sind,
2. die locale elektromotorische Kraft verschwindet,
3. die tangentielle Componente der elektrischen oder der magnetischen Feldstärke an der Grenze dauernd Null sind.

Den beiden letzten zu Folge ist die rechte Seite von (273a) gleich Null, also da

$$\iiint\frac{1}{\tau}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz\geqq 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi k)(X^2+Y^2+Z^2)\,dx\,dy\,dz\right.\\
\left.+\frac{1}{8\pi}\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\leqq 0.$$

Im Anfangszustand sind aber nach der Nebenbedingung 1. elektrische und magnetische Energie beide Null; negativ können sie

nicht werden; also mufs hier das Gleichheitszeichen gelten, woraus unmittelbar

$$X = X' - X'' = 0$$
$$Y = Y' - Y'' = 0$$
etc.,
$$u = u' - u'' = 0$$
etc.

d. h. die Eindeutigkeit der Lösung folgt.

§ 77. Das Energieprincip in der Theorie der quasistationären Ströme.

Wir sind jetzt in der Lage, den in § 68 geforderten Beweis zu führen, dafs die in dem ersten Theil des dritten Abschnitts dargelegte Elektrodynamik zusammen mit der in § 69 entwickelten Theorie der Induction dem Energieprincip genügt. Im § 69 erwähnten wir sogleich am Anfang, dafs die Inductionsgesetze nicht streng, sondern nur für relativ langsame zeitliche Veränderungen gelten können. Zunächst müssen wir fragen, wodurch die Grenze ihres Gültigkeitsbereichs bestimmt ist.

Die Antwort darauf lautet sehr einfach: Da wir in § 69 die magnetische Wirksamkeit des Verschiebungsstromes nicht berücksichtigten, so können die dort abgeleiteten Resultate nur gelten, so lange in (272) alle vorkommende Werthe von $(1 + 4\pi k)\frac{\partial X}{\partial t}$ etc. gegen den Leitungsstrom u, v, w vernachlässigt werden dürfen. Für hinreichend langsame Schwingungen mufs das stets der Fall sein. Wir bezeichnen die Ströme dann als quasistationär, um anzudeuten, dafs wir sie für ihre magnetischen Wirkungen als stationär betrachten. Consequenter Weise müssen wir dann in (273) die zeitliche Vermehrung der elektrischen Energie

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}\iiint(1 + 4\pi k)(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dx\,dy\,dz\right\}$$

gegen das vom Strom in Energie nichtelektromagnetischer Art umgesetzte Energiequantum

$$\iiint(Xu + Yv + Zw)\,dx\,dy\,dz$$

vernachlässigen. Zugleich werden die Componenten der magnetischen Kraft im Unendlichen wie $\frac{1}{R^3}$ Null, da dies für das statische mag-

netische Feld stets gilt, mag es nun von Strömen oder von permanenten Magneten oder von beidem erregt werden. Daher verschwindet das Flächenintegral in (273) für die unendlich ferne Fläche, so dafs für die Anwendung auf den unendlichen Raum nur übrig bleibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\left\{\iiint(1+4\pi\varkappa)(L^2+M^2+N^2)\,dx\,dy\,dz\right\}\\ +\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz=0;\end{aligned}\right\}\quad(273\text{ b})$$

Dafs wir bei der Theorie der Induction von der elektrischen Energie absahen, war also durchaus gerechtfertigt.

Für ein System linearer Ströme I_a, welche Stromkreise mit den Widerständen w_a und den elektromotorischen Kräften E_a durchfliefsen, ist (vergl. § 61)

$$\iiint(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz=\sum(I_a^2 w_a-E_a I_a).$$

Bezeichnet $\mathfrak{W}$ die magnetische Energie des Systems, so geht (273 b) über in

$$\frac{d\mathfrak{W}}{dt}-\sum E_a I_a+\sum I_a^2 w_a=0. \qquad (273\text{ c})$$

Für den einzelnen Strom haben wir in § 69 die Gesetze der Selbstinduction sowie die der Induction durch Verschiebung eines Magneten aus dem Energiesatz abgeleitet. Für mehrere Ströme würde das mifslingen; denn dieser Satz liefert auch für mehrere Variabele nur eine Gleichung, reicht also im Allgemeinen nicht aus. Die zu (248 a) und (248 b) führende Betrachtung war nicht, wie der zu (248) leitende Schlufs, streng, sondern beruhte nur auf Analogie. Nur die Uebereinstimmung mit der Erfahrung sicherte ihr Ergebnis. Wohl aber mufs es nachträglich möglich sein, die Uebereinstimmung unserer Inductionstheorie mit dem Energieprincip nachzuweisen.

Dieser Nachweis ist aus dem Grunde noch nicht in dem allgemeinen Theorem des vorhergehenden Paragraphen enthalten, weil wir dort nur von ruhenden Körpern sprachen. Für bewegte Körper haben wir keine allgemeine Theorie aufgestellt. Aus Stetigkeitsgründen können wir aber schliefsen, dafs, wenn die Bewegungen hinreichend langsam erfolgen, und die Ströme quasistationär sind, aufser magnetischer Energie, Joule'scher Wärme und Arbeit elektrischer Kräfte nur noch Arbeit ponderomotorischer Kräfte in merk-

licher Gröſse auftreten kann. Diese wird aber durch die Abnahme des Selbstpotentials P des Stromsystems gemessen, welche so zu berechnen ist, wie wenn die Stromstärken konstant blieben. Deuten wir diese Bedingung durch die Schreibweise

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{I=\mathrm{const}}$$

an, so ist (273 c) zu vervollständigen zu der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{W}}{dt} - \sum E_a I_a + \sum I_a^2 w_a - \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I=\mathrm{const}} = 0.$$

Die Summationen sind über alle Stromkreise auszuführen. Da nach (247 c) $\mathfrak{W} = -P$ ist, geht sie über in

$$\frac{dP}{dt} + \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I=\mathrm{const}} + \sum I_a\left(E_a - I_a w_a\right) = 0. \qquad (275)$$

Dies muſs nach der Inductionstheorie eine Identität sein, wenn sie und die Elektrodynamik mit dem Energieprincip verträglich sein sollen.

Nun ist bei Ausschluſs permanenter Magnetisirung die magnetische Energie eine homogene quadratische Function der Stromstärken, da die Componenten der Feldstärke lineare homogene Functionen von ihnen sind; also

$$\mathfrak{W} = -P = \frac{1}{2}\sum^a \sum^b p_{ab} I_a I_b, \qquad p_{ab} = p_{ba} \qquad (276)$$

Die Constanten p_{aa} sind die Selbstinductionscoefficienten, p_{ab} (a verschieden von b) die gegenseitigen Inductionscoefficienten der Stromkreise (siehe § 69); die letzteren können im Gegensatz zu den ersteren auch negativ sein, doch ist ihnen, da $\mathfrak{W}$ nie negativ und Null nur, wenn alle I_a gleichzeitig verschwinden, werden kann, die Bedingung

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

auferlegt. Die im Stromkreis von I_a inducirte Kraft ist nach (248 e) gleich $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right)$, d. h. es besteht die Gleichung

$$E_a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right) = I_a w_a.$$

Multiplicirt man sie mit I_a und summirt über alle Ströme, so findet man

$$\sum I_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right) + \sum I_a (E_a - I_a w_a) = 0 . \tag{277}$$

Nun besteht aber die Identität:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum I_a \frac{\partial P}{\partial I_a}\right) = \sum I_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P}{\partial I_a}\right) + \sum \frac{\partial P}{\partial I_a} \cdot \frac{d I_a}{dt},$$

und nach dem Euler'schen Satz für homogene Functionen ist

$$\sum I_a \frac{\partial P}{\partial I_a} = 2 P,$$

wie man an (276) leicht bestätigt. Benutzt man diese beiden Gleichungen, so geht (277) über in

$$2 \frac{dP}{dt} - \sum \frac{\partial P}{\partial I_a} \frac{d I_a}{dt} + \sum I_a (E_a - I_a w_a) = 0;$$

und dies ist, da

$$\frac{dP}{dt} = \sum \frac{\partial P}{\partial I_a} \frac{d I_a}{dt} + \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I = \text{const}},$$

identisch mit der das Energieprincip formulierenden Gleichung (275)

$$\frac{dP}{dt} + \left(\frac{dP}{dt}\right)_{I = \text{const}} + \sum I_a (E_a - I_a w_a) = 0 .$$

Dieser Beweis macht implicite davon Gebrauch, daſs man ein System von elektrischen Strömen als cyclisches System betrachten kann. Das Nähere hierüber siehe Band I dieser Vorlesungen § 75 u. f.

Nicht ganz in den Rahmen der hier besprochenen Annäherung passen die Entladungsschwingungen eines elektrischen Condensators; denn wenn auch längs des Schlieſsungsdrahtes der Leitungsstrom den Verschiebungsstrom weit überwiegt, so fehlt der erstere zwischen den Belegungen des Condensators ganz, und da die Summe aus Leitungs- und Verschiebungsstrom, der elektrische Gesammtstrom, nach § 71 stets geschlossen ist, ist der letztere hier bestimmt nicht zu vernachlässigen. Aber weil er nur zwischen den Condensatorplatten merklich auftritt und nach (256) magnetisch gerade so wirkt wie der Leitungsstrom, bestimmt sich das magnetische Feld, wie wenn

der Condensator keine Unterbrechung der leitenden Strombahn, sondern nur eine Verbreiterung wäre. Aus demselben Grunde wie oben fällt daher in der Energiegleichung (273) das Flächenintegral für die unendlich ferne Fläche fort.

Dagegen mufs die elektrische Energie des Condensators durchaus berücksichtigt werden; sind die Schwingungen nicht zu schnell, so mufs sie wie im statischen Fall gleich $\frac{e^2}{2C}$ sein, wo e die Ladung der einen Belegung, C die Capacität bedeutet. Aus der Energiegleichung folgt also, wenn wir die magnetische Energie mit Hülfe des Selbstinductionscoefficienten p berechnen,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{e^2}{C} + \frac{1}{2}pI^2\right) + I^2 w = 0.$$

Dabei ist von einer elektromotorischen Kraft im Schliefsungsdraht abgesehen. Führt man hier die Differentiation nach t aus und benutzt die Relation

$$-\frac{de}{dt} = I,$$

so findet man

$$-\frac{eI}{C} + pI\frac{dI}{dt} + I^2 w = 0; \tag{278}$$

und durch Division durch I und nochmalige Differentiation nach t

$$p\frac{d^2 I}{dt^2} + w\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \tag{279}$$

Dies ist die Differentialgleichung gedämpfter Schwingungen; und zwar vertritt, wenn man sie mechanisch deuten will, der Selbstinductionscoefficent p die Masse, $\frac{I}{C}$ die treibende Kraft, während das Glied mit w die Dämpfung bestimmt. Ihre vollständige Lösung lautet

$$I = I_1 e^{\alpha_1 t} + I_2 e^{\alpha_2 t},$$

wobei I_1 und I_2 die beiden Integrationsconstanten, α_1 und α_2 die Wurzeln der Gleichung

$$p\alpha^2 + w\alpha + \frac{1}{C} = 0$$

sind; es ist demnach

$$\alpha_1 = \frac{1}{2p}\left(-w + \sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2p}\left(-w - \sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}}\right).$$

Für die Discussion sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Ist

$$w < 2\sqrt{\frac{p}{C}},$$

so sind α_1 und α_2 complex und die vollständige Lösung lautet:

$$I = e^{-\frac{w}{2p}t}\left(I_1 e^{\frac{i}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}\,t} + I_2 e^{-\frac{i}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}\,t}\right).$$

Hier ist I freilich noch complex; zwei unabhängige reelle Lösungen gewinnt man aber leicht, wenn man über die Integrationsconstanten I_1 und I_2 so verfügt, dafs man einmal $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I'$, das andere Mal $I_2 = -I_1 = -\frac{I''}{2i}$ setzt; diese lauten

$$I = I' e^{-\frac{w}{2p}t} \cos\left(\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}\cdot t\right)$$

und

$$I = I'' e^{-\frac{w}{2p}t} \sin\left(\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}\cdot t\right).$$

Die Entladungsschwingungen sind dann periodisch, wenn sie auch gemäfs dem Factor $e^{-\frac{w}{2p}t}$ mit der Zeit abklingen. Die Periode beträgt

$$\frac{4\pi p}{\sqrt{\frac{4p}{C} - w^2}},$$

also bei sehr kleinem, gegen $2\sqrt{\frac{p}{C}}$ zu vernachlässigenden Werth des Widerstandes w

$$2\pi\sqrt{p\,C};$$

Nach dieser Formel schätzte Hertz die Periode seiner Schwingungen bei den in § 75 erwähnten Versuchen, wenngleich sie dafür nur in

roher Annäherung gelten kann. Im Allgemeinen wächst aber die Periode mit zunehmendem Widerstand. Wird schliefslich

$$w > 2\sqrt{\frac{p}{C}},$$

so sind α_1 und α_2 beide reell und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (279),

$$I = I_1 e^{\frac{1}{2p}\left(\sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}} - w\right)t} + I_2 e^{-\frac{1}{2p}\left(\sqrt{w^2 - \frac{4p}{C}} + w\right)t},$$

zeigt, dafs die Entladung aperiodisch vor sich geht.

Eine ausführlichere Discussion dieser Differentialgleichung findet sich in Band I dieser Vorlesungen § 32.

